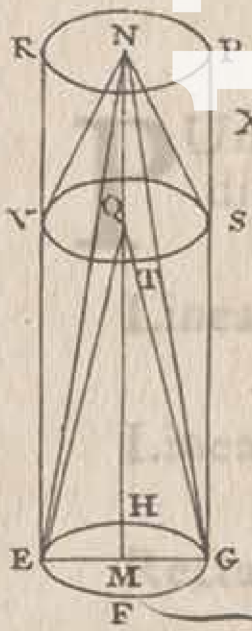
МАТЕМАТИКА

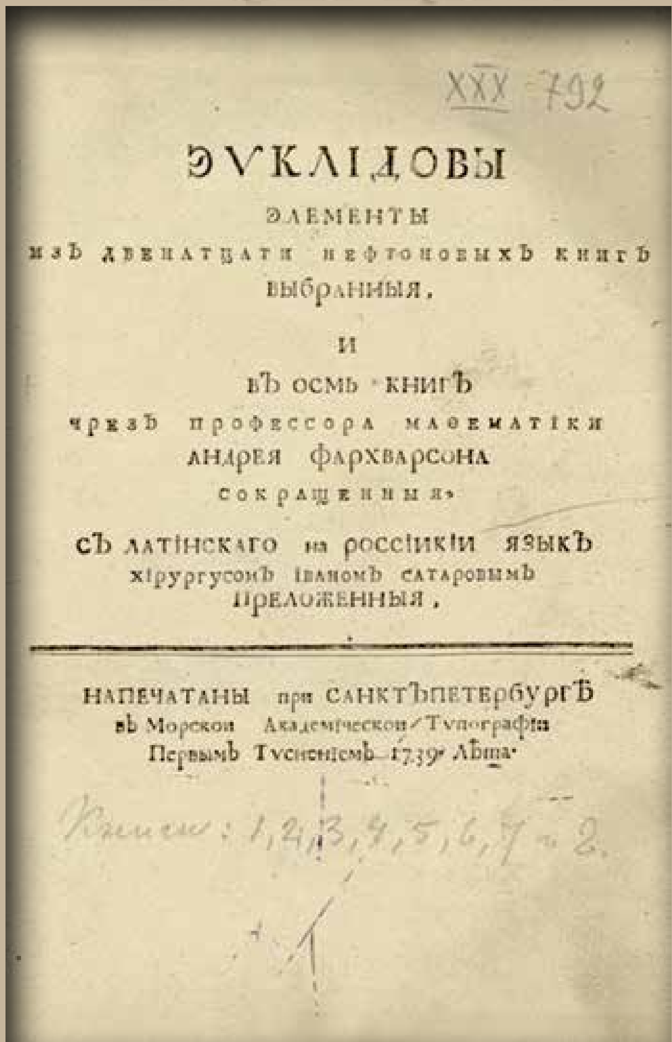
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №5 (834)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

1739

А. ФАРХВАРСОН





XXX 792

ЭVКЛIДОВЫ
ЭЛЕМЕНТЫ
изъ двенатцати нефтоновыхъ книгъ
выбранныя,
и
въ осмь книгъ
чрезъ профессора маѳематики
Андрея Фархварсона
сокращенныя,
съ латинскаго на россiйскiй языкъ
хирургусомъ Iваномъ Сатаровымъ
преложенныя.

НАПЕЧАТАНЫ при САНКТПЕТЕРБУРГѢ
въ Морской Академической Типографiи
Первымъ Тисненiемъ 1739 Лѣта.

Книги: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

« Эвклидовы элементы из двенадцати нефтоновых книг выбранныя, и в осмь книг через профессора математики Андрея Фарварсона сокращенныя…

XVIII ВЕК

1739

МАТЕМАТИКА

Методический журнал
для учителей математики
Издается с 1992 г.
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,
МОСКВА, 119002

Издается совместно с
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Страничка журнала на сайте РАУМ:
raum.math.ru/node/179

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. РОСЛОВА
Ответственный секретарь:
Т. ЧЕРКАВСКАЯ
Редакторы: П. КАМАЕВ,
О. МАКАРОВА
Корректор: Л. ГРОМОВА
Верстка: Л. КУКУШКИНА
Дизайн обложки: Э. ЛУРЬЕ
Дизайн макета: И. ЛУКЬЯНОВ

8 (499) 241-89-79
mat@mccme.ru
mat@1september.ru

По вопросам распространения
обращаться по телефону (499) 745-80-31
e-mail: biblio@mccme.ru

Иллюстрации:
klipartz.com, commons.wikimedia.org,
ik-ptz.ru, books.google.ru,
shm.ru, ru.wikisource.org

Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437
от 14.07.16 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: 26.05.2022
Тираж: 3000 экз.
Для получения доступа
к журналу «Математика»
в электронном виде
необходима регистрация
школы в системе «СтатГрад».
Подробнее см. на сайте
statgrad.org/#2619
ISSN 2658-4042

Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул Интернациональная. д 100. корп. 8,
тел. +7 (831) 216-40-40.
Номер заказа

ТЕМА НОМЕРА: НЕБАНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В НОМЕРЕ

К статьям, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Н. ЖАРКОВСКАЯ,
г. Санкт-Петербург

ЯРКИЕ ЗАДАЧИ СМАРТ-КЕНГУРУ-2022

С подробным разбором всех задач конкурса можно ознакомиться на youtube.com/mathkangrus

25 января во всех регионах нашей страны прошел конкурс-игра «Смарт-КЕНГУРУ». Это новое всероссийское математическое соревнование организовано на принципах, близких к международному конкурсу «Кенгуру». Его создатели ставят целью, сохранив лучшие черты «Кенгуру» — соревнования, которым они занимались в течение многих лет, сделать новое мероприятие более адаптированным к нашим школьным реалиям. В первую очередь это относится к срокам, количеству задач и времени, отводимому на их решение.

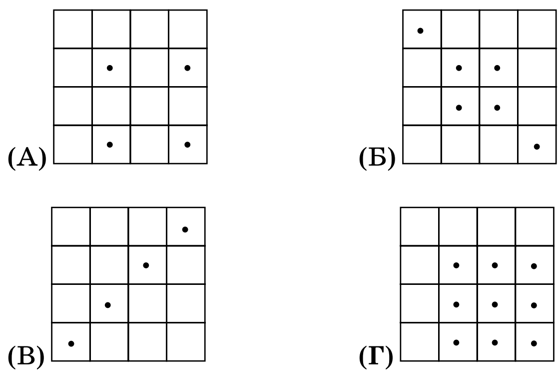
Смещение срока проведения на январь позволяет гарантированно донести результаты до всех участников в текущем учебном году, а сокращение числа задач до 20 (с пропорциональным сокращением времени до 50 минут) делает конкурс более удобным для школы.

При этом неизменными остаются основные принципы: задачи должны быть разнообразными и по темам, и по сложности, каждый участник может найти среди них что-то и по силам, и по вкусу. Конкурс обращен в первую очередь к эмоциям ребят: мы стараемся показать, что решение математических задач может быть делом и доступным, и увлекательным.

Итак, задачи — это самое главное в конкурсе, рассмотрим наиболее яркие из них.

Среди задач для 2-го класса самой трудной оказалась следующая (рядом с номером задачи мы указываем, для каких параллелей она предлагалась, во сколько баллов оценивалась и какой процент участников выбрал верный ответ к этой задаче).

1. (*2-й класс, 5 баллов, 14%*) Квадратный листок 4×4 в клеточку несколько раз согнули по линиям сетки. Сложенный лист проткнули один раз и разогнули обратно. Какая картинка могла получиться?



(Д) Ни одна картинка не могла получиться

Более половины участников (примерно по 26%) выбрали ответы В или Д, а верный ответ Г указали всего 14%.

Для решения этой задачи надо понимать следующее:

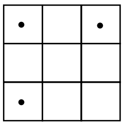
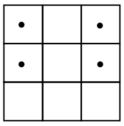
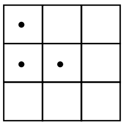
– если в каком-то ряду мы можем проткнуть две или более клетки, то они должны быть либо соседними, либо отстоять одна от другой на четное число клеток,

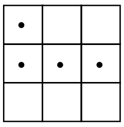
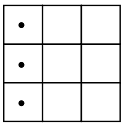
– если клетки расположены в разных рядах, то, для того чтобы их проткнуть одним проколом, придется сложить лист не менее чем в 4 слоя (следовательно, получится 4 симметричных дырки).

Это позволяет отвергнуть ответы А, Б и В. Ответ Г получить можно: для этого надо сложить трехслойную «гармошку», а потом ее тоже сложить в 3 слоя. При этом получится квадрат 2×2, у которого одна клеточка сложена в 9 слоев, две — в 3 слоя и одна — в один слой.

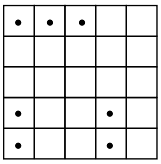
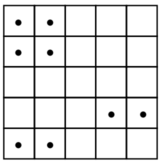
Похожие задачи предлагались и более старшим ребятам (сначала указывается успешность по младшей параллели, а затем — по старшей).

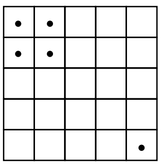
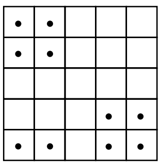
2. (*5–6-е классы, 4 балла, 55%, 56%*) Бумажный лист 3×3 согнули несколько раз по линиям сетки, проткнули один раз и разогнули обратно. Какая картинка могла получиться?

(А)  (Б)  (В) 

(Г)  (Д) 

3. (*9–10-е классы, 5 баллов, 17%, 20%*) Дан бумажный лист 5×5. За одну операцию можно проделать следующее: согнуть его один или несколько раз по линиям сетки (или не сгибать вообще), проткнуть один раз и разогнуть обратно. Какую из картинок А–Г *нельзя получить* за две таких операции?

(А)  (Б) 

(В)  (Г) 

(Д) Все картинки А–Г можно получить

Среди задач для 2-го класса отметим еще две.

4. (*2-й класс, 4 балла, 18%*) Два бумажных прямоугольника лежат на столе (рис. 1). Сколько углов у фигуры, которая имеет два слоя?

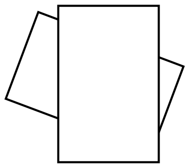


Рис. 1

(А) 3 (Б) 4 **(В)** 5 (Г) 6 (Д) 7

Эта задача тоже оказалась трудной для второклассников, верный ответ указали всего 18% из них, а 35% выбрали ответ Д, подсчитав все видимые углы.

5. (*2-й класс, 5 баллов, 27%*) В ребусе разные буквы заменяют разные цифры, а одинаковые буквы — одинаковые цифры. Смартик нашел решение ребуса, в котором есть цифра 6. Какую цифру в этом решении заменяет буква И?

$$\begin{array}{r} \text{ТИК} \\ +\,\text{ТОК} \\ \text{КОТ} \\ \hline 2022 \end{array}$$

(А) 4 (Б) 5 (В) 7 (Г) 8 (Д) 9

Хотя эта задача расценивалась составителями как наиболее трудная, похоже, основная трудность в ней — объяснить отсутствие других решений, но дети этим обычно не занимаются, а просто подбирают нужные соотношения. В частности, в этой задаче нетрудно понять, что Т — цифра четная (иначе не получить 2 в разряде единиц) и не маленькая (иначе не получить 2 в разряде тысяч). Таким образом, Т — это либо 6, либо 8. Первый вариант легко отвергается, а второй приводит к тому, что К = 2 или К = 7, но вариант 7 явно не годится, так как при этом в разряде сотен получается $8 + 8 + 7 = 23$, что явно больше, чем надо.

Итак, Т = 8, К = 2, следовательно,

$$\text{О} + \text{О} + \text{И} + 1 = 22,$$

то есть О + О + И = 21, причем либо О, либо И равно 6. Так как 21 — число нечетное, то 6 — это О, значит, И = 21 – 6 – 6 = 9.

Вот еще один ребус.

6. (*3–4-е классы, 4 балла, 22%, 25%*) В ребусе СМА + Р = ТИК разные цифры обозначены разными буквами. Какая цифра обозначена буквой М?

(А) 4 (Б) 6 (В) 7 (Г) 8 (Д) 9

Несмотря на то, что задача фактически проще, а школьники старше, статистика по этому ребусу выглядит скромнее. Скорее всего, это связано с тем, что поначалу условия кажутся очень неопределенными.

Чтобы ответить на вопрос, надо заметить, что, прибавляя к трехзначному числу однозначное, мы получаем новое трехзначное, в котором все цифры изменены по сравнению с исходным числом. Что это значит? Только одно: переход через десяток есть и в разряд десятков, и в разряд сотен. Но в разряд десятков может быть перенос только одной единицы (от сложения в разряде единиц). Значит, перенос из разряда десятков в разряд сотен возможен, только если М = 9.

Отметим, что все неверные ответы, кроме Г, пользовались примерно одинаковой популярностью в обеих параллелях (около 20%), ответ Г набрали всего около 12%.

Отметим еще две задачи этого варианта.

7. (*3–4-е классы, 4 балла, 28%, 34%*) Из восьми одинаковых брусков сложен параллелепипед (рис. 2).

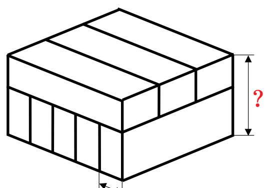


Рис. 2

Один из размеров бруска равен 3 см. Чему равна высота этого параллелепипеда?

(А) 3 см (Б) 5 см (В) 6 см **(Г)** 8 см (Д) 15 см

Эта несложная задача любопытна тем, что позволяет сравнить результаты участников с ответами более старших школьников.

8. (*5–6-е классы, 4 балла, 33%, 39%*) Из восьми одинаковых брусков сложили параллелепипед (рис. 3).

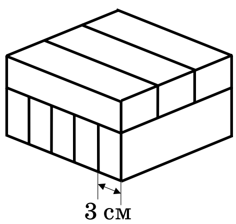


Рис. 3

Один из размеров бруска равен 3. Чему равен объем одного бруска?

(А) 45 (Б) 75 (В) 135 **(Г)** 225 (Д) 375

И еще одна задача для начальной школы.

9. (*3–4-е классы, 5 баллов, 22%, 24%*) У двузначного числа цифру десятков увеличили на 4, а цифру единиц уменьшили на 4. Получившееся двузначное число делится на то число, которое было вначале. Какому из чисел А–Д может быть равен результат деления?

(А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 7

Какие изменения произошли с данным числом? Смена цифры десятков означает увеличение на 40, а цифры единиц — уменьшение на 4. Итого, новое число больше начального на 36, и оно делится на исходное число. Это значит, что 36 тоже делится на исходное число, а результат деления на 1 меньше, чем если мы разделим новое число на исходное.

На какие двузначные числа делится 36? Только на 12, на 18 и на себя. Значит, исходное число могло быть только одним из этих трех чисел. Но у числа 12 нельзя уменьшить цифру единиц на 4, из числа 18 получается число 54, а из числа 36 — число 72. Для первой пары результат деления равен 3 (это ответ А), а для второй — 2 (такого ответа нет среди предложенных).

Перейдем к задачам для основной школы. Начнем с любопытной задачки для 5–6-х классов.

10. (*5–6-е классы, 3 балла, 27%, 25%*) Предпоследнее число четвертого десятка — это

(А) 37 (Б) 38 **(В)** 39 (Г) 48 (Д) 49

Десятками считают с первого класса, и вроде бы все знают, что первый десяток начинается с 1 и кончается, естественно, числом 10. Тем не менее ответ Б набрал заметно больше голосов, чем верный, причем шестиклассникам он даже понравился больше, чем пятиклассникам (соответственно, 31% и 36%), а примерно четверть участников обеих параллелей выбрали ответ Д.

10. (*5–6-е классы, 5 баллов, 22%, 22%*) В ряд в порядке возрастания лежали пять карточек с цифрами 1, 2, 3, 4 и 5. Смартик поменял местами две карточки, затем между соседними карточками правильно вписал знак «>» или «<», а карточки убрал. Какая из цепочек знаков А–Г не могла у него получиться?

(А) < < > < (Б) > > < <
(В) < > < > (Г) > < < >
(Д) Все варианты А–Г могли получиться

Переставив местами 4 и 3, получим цепочку неравенств А: $1 < 2 < 4 > 3 < 5$, переставив 1 и 3, получим ответ Б: $3 > 2 > 1 < 4 < 5$, переставив 5 и 2, получим ответ В: $1 < 5 > 3 < 4 > 2$, наконец, переставив 1 и 5, получим ответ Г: $5 > 2 < 3 < 4 > 1$.

И еще одна вариация на тему рыцарей и лжецов из этого же варианта.

11. (*5–6-е классы, 5 баллов, 36%, 40%*) В комнате 10 человек, каждый из которых рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Более половины из этих десяти человек сказали: «Среди нас рыцарей меньше трети». Сколько в комнате рыцарей?

(А) 0 (Б) 3
(В) 4 (Г) 5
(Д) 6

Начнем с того, что все, кто высказался, не могут быть рыцарями: меньше трети от 10 — это 3 или меньше, и если бы говорящие были рыцарями, получалось бы противоречие. Значит, рыцарей больше трети (иначе окажется, что лжецы не лгут), но меньше половины (так как больше половины, то есть 6 или больше, солгали). Таким образом, рыцарей может быть только четверо.

Рассмотрим теперь задачи для 7–8-х классов.

12. (*7–8-е классы, 4 балла, 22%, 24%*) На какое наименьшее число надо умножить 20^{22}, чтобы получился куб натурального числа?

(А) $2 \cdot 5$ (Б) $2^2 \cdot 5$
(В) $2 \cdot 5^2$ (Г) $2^2 \cdot 5^2$ (Д) 20^2

Разложение числа на простые множители имеет вид $2^{44} \cdot 5^{22}$, следовательно, чтобы получить куб натурального числа, надо добиться, чтобы показатели степени при простых множителях делились на 3. Для этого надо данное число умножить на $2 \cdot 5^2$.

Заметим, что самым популярным ответом к этой задаче оказался Г ($2^2 \cdot 5^2$), его выбрали 35% участников обеих параллелей (по всей видимости, они забыли, что в разложении 20 на простые множители участвует 2^2, а не 2). Кроме того, обращает на себя внимание то, что различие в успешности при решении этой задачи между учениками 7-х и 8-х классов невелико.

Не радуют и результаты следующей, практически школьной, задачи.

13. (*7–8-е классы, 4 балла, 11%, 11%*) Из города в Простоквашино в 14:00 выехал Дядя Федор на велосипеде, и одновременно из Простоквашино выехал почтальон Печкин на тракторе. В 16:00 они встретились, а в 17:30 Дядя Федор приехал в Простоквашино. Когда Печкин приехал в город?

(А) 18:00 (Б) 18:15
(В) 18: 30 **(Г)** 18:40
(Д) 18:45

Дядя Федор потратил на весь путь 3,5 часа (от 14:00 до 17:30), при этом с Печкиным он встретился в 16:00, то есть проехав $\frac{2}{3{,}5} = \frac{4}{7}$ часть пути. Соответственно, Печкин к этому моменту проехал $\frac{3}{7}$ пути. Таким образом, 2 часа, которые Печкин ехал до этой встречи, составляют $\frac{3}{7}$ от всего времени, затраченного им на дорогу. Итак, весь путь занял у Печкина 2 часа:

$$\frac{3}{7} = 280 \text{ мин} = 4 \text{ часа } 40 \text{ мин},$$

то есть в город он приехал в 18:40.

По-настоящему трудной оказалась в этом варианте следующая задача.

14. (*7–8-е классы, 5 баллов, 10%, 10%*) Назовем трехзначное число *разнообразным*, если оно состоит из разных цифр. Цепочку из идущих подряд разнообразных чисел назовем *богатой*, если она имеет наибольшую длину. Сколько всего есть богатых цепочек?

(А) 1 (Б) 9 (В) 12 (Г) 16 (Д) 18

Прежде всего заметим, что богатая цепочка состоит из 8 чисел: при переходе от любого числа к следующему обязательно меняется последняя цифра (цифра единиц). Если мы хотим, чтобы при этом она как можно дольше не совпадала с цифрами десятков и сотен, надо чтобы эти цифры у первого или последнего числа в цепочке были соседними (тогда цифра единиц ни разу не совпадет с этими двумя цифрами и примет 8 разных значений). Например, в первой сотне трехзначных чисел богатыми будут цепочки от 102 до 109 и от 123 до 130 (обе по 8 чисел), а в пятой сотне такими цепочками будут числа от 567 до 574 и от 536 до 543. Таким образом, в каждой из 9 сотен трехзначных чисел есть ровно по две богатые цепочки, а всего таких цепочек 18.

Заметим, что найти цепочки, которые начинаются с числа вида 123 или 567, гораздо легче, чем, допустим, цепочку, оканчивающуюся на 543. Это хорошо видно по статистике: около 45% участников обеих параллелей выбрали ответ Б (то есть по одной цепочке в сотне).

В варианте для 9–10-х классов неожиданно самой трудной оказалась задача-шутка.

15. (*9–10-е классы, 4 балла, 12%, 15%*) Диагональ квадрата равна квадрату стороны этого квадрата. Чему равна эта диагональ?

(А) $\sqrt{2}$ **(Б)** 2
(В) $2\sqrt{2}$ (Г) 4
(Д) Невозможно определить

Пусть сторона квадрата равна a, тогда его диагональ равна $a\sqrt{2}$, а по условию задачи $a\sqrt{2} = a^2$.

Следовательно, $a=\sqrt{2}$, а диагональ равна

$$a\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2.$$

Более четверти участников обеих параллелей оробели и выбрали ответ Д, а более 40% выбрали ответ А.

Завершим наш разбор любопытной задачей о средних.

16. (*9–10-е классы, 5 баллов, 19%, 20%*) В классе 15 человек, каждый из них увлекается шашками или шахматами (некоторые и тем, и другим). Всего шашками увлекаются 10 человек, шахматами тоже 10 человек. В классе прошла контрольная работа по математике, которую оценивали по пятибалльной системе. Оказалось, что средний балл любителей шахмат — 3,7, а любителей шашек — 3,5. Какое наибольшее значение может принимать средний балл во всем классе?

(А) 3,6 (Б) 3,8

(В) 3,9 **(Г)** 4 (Д) 4,1

Прежде всего заметим, что и шашками, и шахматами увлекается

$$10+10-15=5 \text{ человек.}$$

Итак, у нас есть 5 человек, которые играют только в шашки, 5 — тех, кто играет и в шашки, и в шахматы, и 5 — играющих только в шахматы. Шахматисты в сумме набрали 37 баллов, а шашисты — 35, но если мы эти величины сложим, то дважды учтем баллы тех, кто играет и в шашки, и в шахматы.

Пусть x — баллы, набранные любителями обеих игр, тогда средний балл по классу равен

$$\frac{37+35-x}{15}=\frac{72-x}{15}.$$

Мы хотим, чтобы эта величина была как можно больше, значит, x надо постараться сделать как можно меньше. Для этого надо как можно больше баллов «отдать» тем, кто играет только в одну игру. Но и шашистам, и шахматистам мы можем отдать не больше, чем по 25 баллов (их всего по 5 человек). Тогда от 37 баллов шахматистов у нас останется 12, а от 35 баллов шашистов только 10, но надо помнить, что эти «остатки» мы отдаем одним и тем же ученикам (это и есть x, значит, отдавать надо 12).

В итоге средний балл по классу будет равен

$$\frac{72-x}{15}=\frac{72-12}{15}=4.$$

Заметим, что 36% девятиклассников и 39% десятиклассников выбрали ответ А, то есть просто среднее из данных значений.

В завершение отметим, что теперь на нашем сайте появился раздел «Личный кабинет», зарегистрировавшись в котором каждый участник конкурса может узнать свой результат, а учитель может распечатать отчет с результатами своих учеников. Пандемия подтолкнула нашу команду, как и многих других, к более широкому использованию дистанционных инструментов. Будем надеяться, что пандемия все-таки уйдет, а новые инструменты нам еще послужат.

Окончание. Начало на с. 4.

– Строить график квадратичной функции, описывать свойства квадратичной функции по ее графику.

– Использовать свойства квадратичной функции для решения задач.

– На примере квадратичной функции строить график функции $y=af(kx+b)+c$ с помощью преобразований графика функции $y=f(x)$.

– Иллюстрировать с помощью графика реальную зависимость или процесс по их характеристикам.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

– Свободно оперировать понятиями: «последовательность», «арифметическая прогрессия» и «геометрическая прогрессия».

– Задавать последовательности разными способами: описательным, табличным, с помощью формулы n-го члена, рекуррентным.

– Выполнять вычисления с использованием формул n-го члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы первых n членов.

– Изображать члены последовательности точками на координатной плоскости.

– Решать задачи, связанные с числовыми последовательностями, в том числе задачи из реальной жизни (с использованием калькулятора, цифровых технологий).

– Распознавать и приводить примеры конечных и бесконечных последовательностей, ограниченных последовательностей, монотонно возрастающих (убывающих) последовательностей.

– Иметь представление о сходимости последовательности, уметь находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Применять метод математической индукции при решении задач.