24. Найдите все значения a, при которых система $\begin{cases}(1-\lg^2 x)(y-ax)=0;\\ y=x^2+a\end{cases}$ имеет ровно 3 решения.

(А) $\left(-\frac{1}{90};0\right);\ 4$ (Б) $(-\infty;0)\,;4$ (В) $(-\infty;0)\,;4;\,\frac{100}{9}$
(Г) $(-\infty;0)\,;\left[4;\frac{100}{9}\right]$ (Д) $\left(-\infty;-\frac{1}{90}\right);\left(-\frac{1}{90};0\right);4;\,\frac{100}{9}$

VII. (Задача 19)

25. Четное натуральное число n имеет ровно 5 натуральных делителей. Сколько натуральных делителей имеет число $10n$?

(А) 7 (Б) 8 (В) 10 (Г) 12 (Д) 15

26. Пусть N — наименьшее из возможных чисел, обладающих свойством: $10N$ является квадратом натурального числа, а $6N$ является кубом натурального числа. Чему равна сумма первой и последней цифр числа N?

(А) 3 (Б) 5 (В) 6 (Г) 8 (Д) 13

27. Назовем *родственником* натурального числа другое число, записанное тем же набором цифр. Например, число 424 — родственник числа 244, а число 422 — нет. Сколько родственников не бывает у трехзначного числа с суммой цифр 5?

(А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) любое из чисел А–Г возможно

28. Вдоль дороги растут дубы и березы, всего 100 деревьев. Количество деревьев между любыми двумя дубами не равно 5. Какое наибольшее количество дубов может быть среди этих 100 деревьев?

(А) 17 (Б) 50 (В) 51 (Г) 52 (Д) 53

Бланк с задачами после тестирования остается участнику на память. Рекомендуем отмечать в этом бланке свои ответы.

Правильные ответы и решения будут опубликованы на сайте mathkang.ru.

Индивидуальные рецензии можно получить в личном кабинете на сайте mathkang.ru, не дожидаясь поступления результатов в школу.

Партнер конкурса — Университет ИТМО mathkang.ru/itmo.

Время, отведенное на решение задач, — 100 минут. В каждой задаче среди ответов (А)–(Д) ровно один верный.

СМАРТ КЕНГУРУ

Тест готовности к профильному ЕГЭ по математике

31 января 2025 г. **11 класс**

Задания теста сгруппированы в блоки в соответствии со структурой заключительной части профильного ЕГЭ по математике (задачи с полным решением). Каждое из этих заданий может быть одним из шагов для решения соответствующей задачи экзамена.

I. (Задача 13)

1. Чему равна сумма всех корней уравнения $3\sin x-2\cos^2 x=0$ из интервала $\left(-\pi;\frac{5\pi}{2}\right)$?

(А) $\frac{\pi}{6}$ (Б) $\frac{19\pi}{6}$ (В) π (Г) $\frac{7\pi}{6}$ (Д) $\frac{5\pi}{3}$

2. Какие корни уравнения $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$ лежат на интервале $(2\pi;4\pi)$?

(А) 3π (Б) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}$ (В) $\frac{9\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4}$ (Г) $\frac{11\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4}$ (Д) $\frac{9\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4}$

3. Сколько корней имеет уравнение $\lg^2 x-2\lg x+2=2^{\sin\pi x-1}$?

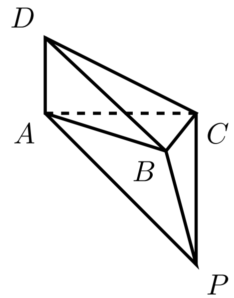
(А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) 4

4. Какой из интервалов целиком содержится в области определения функции $y=\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{2}\cos 2x}$?

(А) $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ (Б) $\left(-\frac{\pi}{3};0\right)$ (В) $\left(\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$ (Г) $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ (Д) $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$

II. (Задача 14)

Про многогранник $DABCP$ известно, что $DA\perp ABC$, $PC\perp ABC$, $AB\perp BC$, $BC=AD=1$, $AC=CP=2$.



5. Сколько прямых из списка AD, BD, CD, PC, BP, AC перпендикулярны прямой BC?

(А) 1 (Б) 2 (В) 3 (Г) 4 (Д) 5

6. Найдите DB.

(А) $\sqrt{3}$ (Б) 2 (В) $2\sqrt{3}$ (Г) $\sqrt{5}$ (Д) $\sqrt{7}$

7. Чему равен объем многогранника $DABCP$?

(А) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (Б) $\sqrt{3}$ (В) 2 (Г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Д) $\frac{2}{3}$

8. Найдите синус угла между прямой BP и плоскостью ACD.

(А) $\frac{1}{2}$ (Б) $\frac{\sqrt{15}}{10}$ (В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Г) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (Д) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

III. (Задача 15)

9. Решите неравенство $9^x - 3^{x+1} - 10 > 0$.

(А) $(-\infty; -2); (5; +\infty)$ (Б) $(5; +\infty)$ (В) $(-\infty; -\log_3 2); (\log_3 5; +\infty)$

(Г) $(\log_3 5; +\infty)$ (Д) $(-\log_3 2; \log_3 5)$

10. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству $\dfrac{\sqrt{36-x^2}\cdot(x+5)}{x^3-3x^2-10x} < 0$?

(А) 4 (Б) 5 (В) 6 (Г) 7 (Д) 11

11. Решите неравенство $\log_2(\log_3 x + 3) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(3 - \log_3 x)$.

(А) $\left(\frac{1}{27}; 3^{-2\sqrt{2}}\right]; \left[3^{2\sqrt{2}}; 27\right)$ (Б) $\left(\frac{1}{27}; 3^{-2\sqrt{2}}\right]$

(В) $\left(-\infty; 3^{-2\sqrt{2}}\right]; \left[3^{2\sqrt{2}}; 27\right)$ (Г) $\left(-\infty; \frac{1}{27}\right]; [27; +\infty)$

(Д) $\left[3^{2\sqrt{2}}; +\infty\right)$

12. Положительные числа a и b удовлетворяют следующим условиям $(1-a)^3 = a^2$, $b^3 - 1 = b^2$. Тогда обязательно

(А) $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$ (Б) $\sqrt[5]{a} \geqslant \sqrt[12]{b}$ (В) $a + 2 \geqslant b$ (Г) $(a-1)^{10} \geqslant \sqrt{b}$

(Д) ни одно из неравенств А–Г не обязано выполняться

IV. (Задача 16)

13. В корзине с фруктами 35% всех яблок красные, а 13% всех фруктов в корзине — яблоки, но не красные. Сколько процентов от всех фруктов в корзине составляют яблоки?

(А) 13 (Б) 20 (В) 22 (Г) 48 (Д) 65

14. В какой из геометрических прогрессий А–Г есть такой же член, что и в геометрической прогрессии $3; \sqrt{2}; \ldots$?

(А) $1; \frac{2}{\sqrt{3}}; \ldots$ (Б) $\frac{1}{3}; 3\sqrt{2}; \ldots$ (В) $\frac{\sqrt{2}}{9}; \frac{2}{27}; \ldots$ (Г) $\frac{3}{2}; 1; \ldots$ (Д) ни в одной

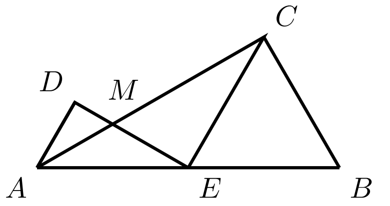
15. Буратино расставляет по кругу целые числа от 1 до 100. За каждое число, которое больше суммы своих соседей, папа Карло дает ему один золотой. Какое наибольшее количество золотых сможет получить Буратино?

(А) 99 (Б) 50 (В) 49 (Г) 25 (Д) 13

16. В январе дядя Ваня взял в кредит 122 000 рублей на три года под 25% годовых. Первого мая начисляются проценты на остаток долга, а в декабре выплачивается часть долга. За три года дядя Ваня закрыл кредит равными платежами. Найдите размер ежегодного платежа.

(А) 45 000 (Б) 50 833 (В) 57 500 (Г) 62 500 (Д) 65 000

V. (Задача 17)



Точка E — середина отрезка AB, треугольник ECB — правильный, треугольник ADE — прямоугольный ($\angle D = 90^\circ$), $AE = 2$, $AD = 1$, M — точка пересечения отрезков AC и DE.

17. Какой из углов А–Г не равен 30°?

(А) $\angle DEA$ (Б) $\angle ACE$ (В) $\angle CAE$

(Г) $\angle DAM$ (Д) все углы А–Г равны 30°

18. Найдите DC.

(А) $2\sqrt{3}$ (Б) $\sqrt{5}$ (В) 3 (Г) $\sqrt{7}$ (Д) $2\sqrt{2}$

19. $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EB} =$

(А) $\vec{0}$ (Б) $\overrightarrow{DE}$ (В) $2\overrightarrow{DM}$ (Г) $\overrightarrow{CM}$ (Д) $\overrightarrow{AB}$

20. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

(А) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (Б) $3 + \sqrt{3}$ (В) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ (Г) $3\sqrt{3}$ (Д) $4\sqrt{3}$

VI. (Задача 18)

21. На плоскости заданы прямые $y = ax - 1$ и $y = x + b$. Известно, что первая прямая пересекает ось Ox правее, чем вторая, а ось Oy — выше, чем вторая. Какое из неравенств А–Г может быть неверным?

(А) $a > 0$ (Б) $ab > -1$ (В) $a < 1$

(Г) $a + b < 0$ (Д) все неравенства А–Г обязательно верны

22. Рассмотрим квадратичные функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), для которых $y(1) = 1$, $y(3) = -7$. Какое из утверждений А–Г неверно?

(А) если $c < 1$, то $a < 0$ (Б) если $a < 0$, то $c < 1$

(В) если $-\frac{b}{2a} < 1$, то $a < 0$ (Г) если $a < 0$, то $-\frac{b}{2a} \leqslant 3$

(Д) все утверждения А–Г обязательно верны

23. Уравнение $x^2 + bx + c = \frac{1}{x}$ не может иметь

(А) 3 положительных корня

(Б) 1 положительный и 2 отрицательных корня

(В) 1 положительный и 0 отрицательных корней

(Г) 1 отрицательный и 1 положительный корни

(Д) 1 отрицательный и 2 положительных корня