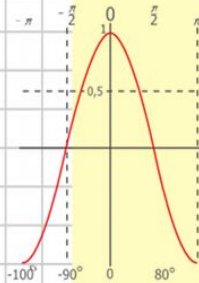
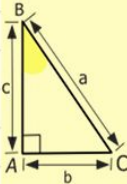
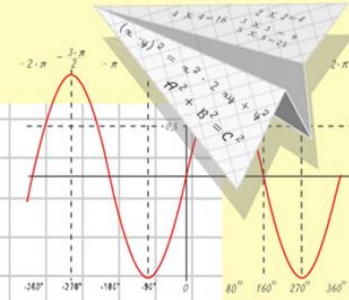
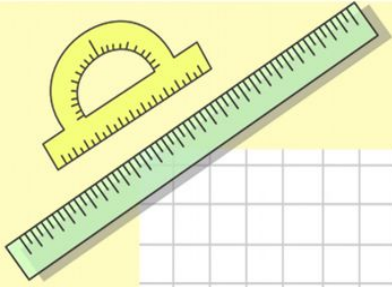


Математик

а

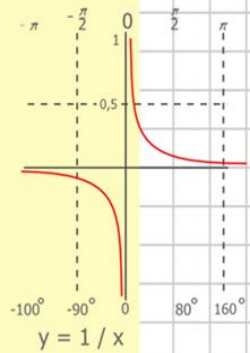
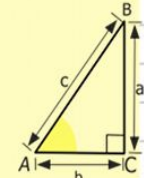
Мудрецы и стратегии

Как превратить разговор о сложных комбинаторно-логических задачах в математический спектакль



$y = \cos x$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



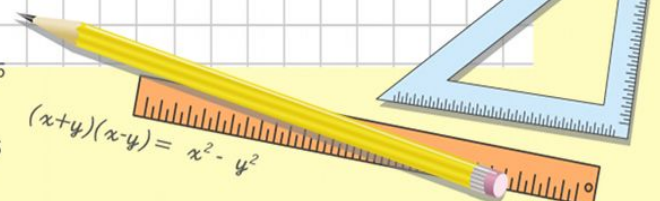
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

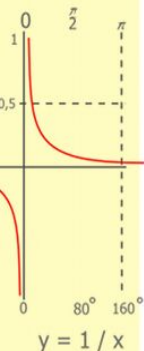
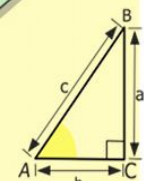
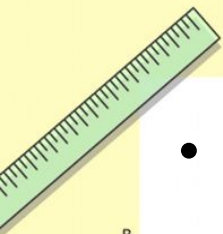
$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

О чем пойдёт речь

- Математические задачи крайне редко «театрализуются». Почти любая фабула только отвлекает от математической сути.
- А как же «рыцари и лжецы»? Нормально, но чтобы начать такое решать, нам потребуется еще «детектив». А хотелось бы самодостаточности задачи.
- Задачи на поиск коллективной (кооперативной!) стратегии – идеальный объект для того, чтобы представить их на сцене и в лицах.



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 2500 \\ + 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

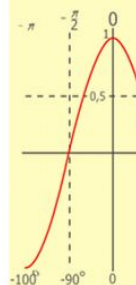
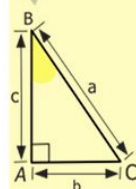
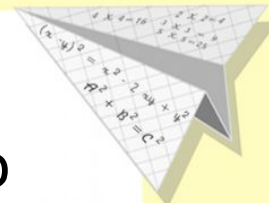
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

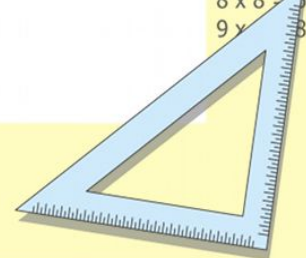
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



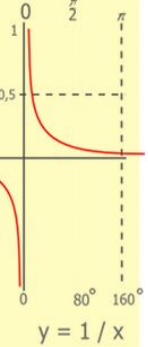
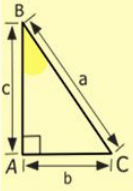
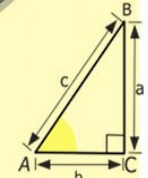
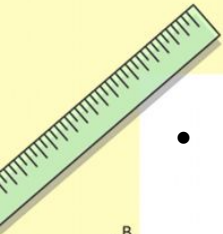
$$y = \cos$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



1. Три мудреца и пять шляп

- Король собрал троих своих лучших мудрецов и объявил о том, что устроит им следующее испытание: он заранее изготовит пять шляп – две чёрных и три белых – после чего поставит мудрецов по кругу и наденет на каждого какую-то из шляп – черную или белую. Каждый будет видеть шляпы на остальных двоих, но не свою. Мудрецам запрещено как-либо общаться между собой во время испытания. Они будут считаться успешно выдержавшими испытание, если хотя бы кто-то из них сможет правильно определить цвет своей шляпы и никто не ошибётся. Как мудрецам пройти это испытание?



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

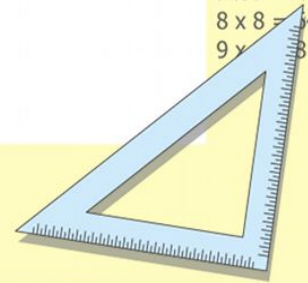


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

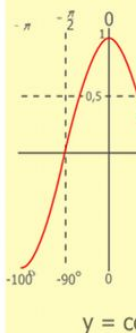
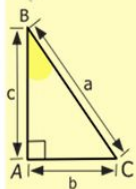
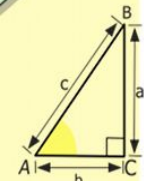
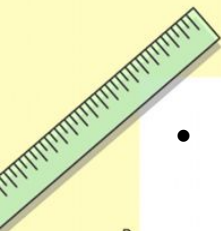
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



1. Три мудреца и пять шляп

- Король собрал троих своих лучших мудрецов и объявил о том, что устроит им следующее испытание: он заранее изготовит пять шляп – две чёрных и три белых – после чего поставит мудрецов по кругу и наденет на каждого какую-то из шляп – черную или белую. Каждый будет видеть шляпы на остальных двоих, но не свою. Мудрецам запрещено как-либо общаться между собой во время испытания. Они будут считаться успешно выдержавшими испытание, если хотя бы кто-то из них сможет правильно определить цвет своей шляпы и никто не ошибётся. Как мудрецам пройти это испытание?
- Сценарий:** Нам нужны три ученика, играющие роли мудрецов, и «король». Вместо шляп берем ленточки из ткани белого или черного цвета (или бельевую резинку). Для первого раза нужно надеть мудрецам две чёрных ленточки и одну белую. Для второго – одну чёрную и две белых. Для последнего, самого сложного, – три белых ленты (шляпы). Важной частью сценария является «порядок опроса». Начинать опрос нужно с тех мудрецов, которые видят шляпы разного цвета. Тогда третий мудрец сможет правильно выстроить логическую цепочку про цвет своей шляпы.



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

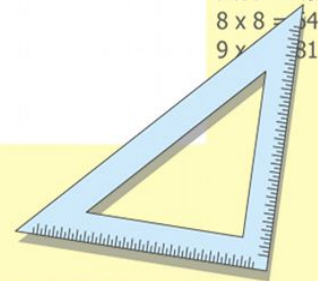
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

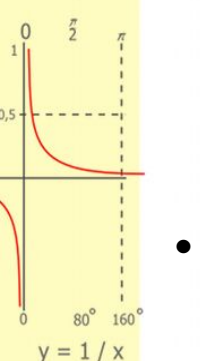
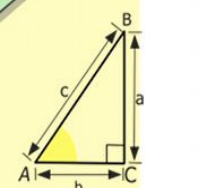
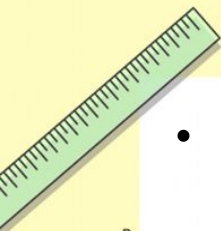
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



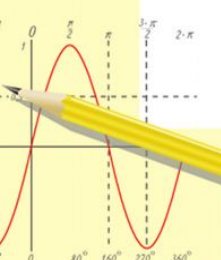
1. Три мудреца и пять шляп

- Король собрал троих своих лучших мудрецов и объявил о том, что устроит им следующее испытание: он заранее изготовит пять шляп – две чёрных и три белых – после чего поставит мудрецов по кругу и наденет на каждого какую-то из шляп – черную или белую. Каждый будет видеть шляпы на остальных двоих, но не свою. Мудрецам запрещено как-либо общаться между собой во время испытания. Они будут считаться успешно выдержавшими испытание, если хотя бы кто-то из них сможет правильно определить цвет своей шляпы и никто не ошибётся. Как мудрецам пройти это испытание?

- Решение:** Разберём сразу самый сложный случай, когда на головах мудрецов три белых шляпы. Мудрец А может рассуждать так: допустим, у меня чёрная шляпа. Тогда каждый из моих визави В и С видит одну чёрную и одну белую шляпы. Но что им мешает догадаться о цвете своей шляпы? Ведь В понимает, что если бы на нем была чёрная шляпа, то С, видя две чёрных, сразу бы правильно ответил на вопрос короля! Следовательно, В сразу соображает, что шляпа на нём – белая. Да и А тоже может рассуждать точно так же. Стоп! Поскольку оба они молчат, то, значит, они не видят на мне чёрной шляпы. Ура, я знаю – шляпа на мне белая!



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

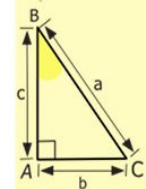
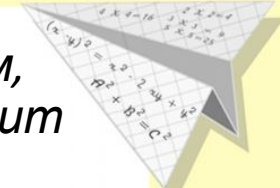
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

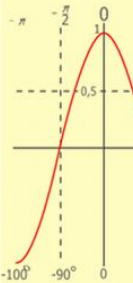
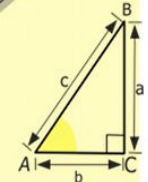
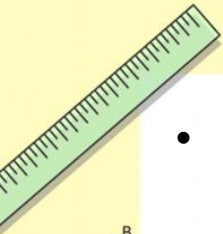


$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



2. Шесть мудрецов по кругу

- Король снова собрал своих мудрецов (на сей раз – шестерых) и велел им подготовиться к более сложному испытанию. В нём будут использованы шляпы шести цветов, причём среди шляп на разных мудрецах могут быть и одноцветные. Кто-нибудь из мудрецов должен верно определить цвет своей шляпы. Король также предупредил, что ответ «не знаю» он не примет. Мудрецы могут заранее обсудить задачу и договориться о том, как именно они будут действовать – но все их договорённости должны произойти до раздачи шляп. Потом, как и раньше, любое общение запрещено.



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

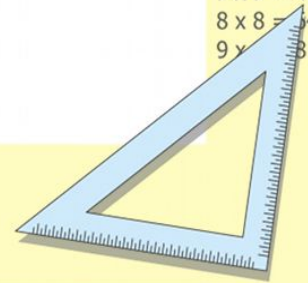


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

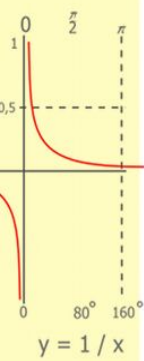
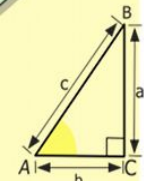
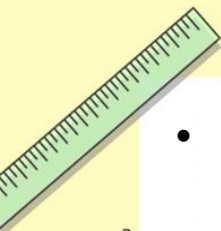
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



2. Шесть мудрецов по кругу

- *Король снова собрал своих мудрецов (на сей раз – шестерых) и велел им приготовиться к более сложному испытанию. В нём будут использованы шляпы шести цветов, причём среди шляп на разных мудрецах могут быть и одноцветные. Кто-нибудь из мудрецов должен верно определить цвет своей шляпы. Король также предупредил, что ответ «не знаю» он не примет. Мудрецы могут заранее обсудить задачу и договориться о том, как именно они будут действовать – но все их договорённости должны произойти до раздачи шляп. Потом, как и раньше, любое общение запрещено.*
- **Сценарий:** Здесь удобно сразу договориться о способе кодировки цветов. Например, можно ввести роль главного королевского шляпника, который убежит на базар покупать шляпную ткань, но перед этим успеет рассказать всем, что он плохо различает цвета, но красный цвет у него будет иметь номер 1, оранжевый – номер 2, жёлтый – 3, зелёный – 4, синий – 5, а фиолетовый – 6. И пока он не сделал всем шляпы, мудрецы могут потренироваться просто с их номерами. Разумеется, номера должны быть известны всем мудрецам, кроме того, на ком этот номер будет, – их нужно написать на бумажных кружках и наклеить эти кружки на всё те же ленты или резинки.



$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 5 \ 00 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

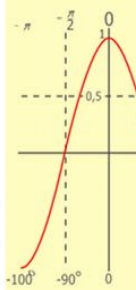
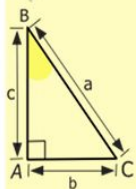
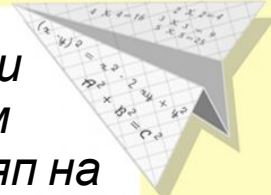
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y = \cos$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81

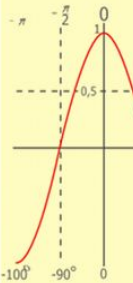
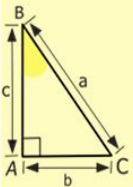
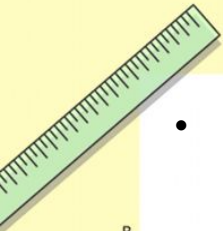


2. Шесть мудрецов по кругу

Король снова собрал своих мудрецов (на сей раз – шестерых) и велел им подготовиться к более сложному испытанию. В нём будут использованы шляпы шести цветов, причём среди шляп на разных мудрецах могут быть и одноцветные. Кто-нибудь из мудрецов должен верно определить цвет своей шляпы. Король также предупредил, что ответ «не знаю» он не примет. Мудрецы могут заранее обсудить задачу и договориться о том, как именно они будут действовать – но все их договорённости должны произойти до раздачи шляп. Потом, как и раньше, любое общение запрещено.

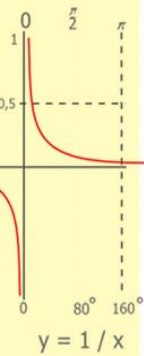
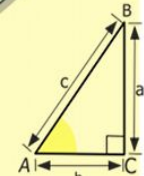
Решение (начало): Здесь мы имеем дело с настоящей сложной математической задачей. Она кажется неразрешимой: так как король больше не спрашивает мудреца, давшего неверный ответ, то у каждого из мудрецов есть всего одна попытка. Если мудрецы будут просто пытаться называть цвета наугад, то не исключено, что ошибутся все, - и тогда испытание провалено!

Как же им быть? Фактически возможность договориться даёт им шесть попыток угадывания. Если бы все эти шесть попыток были у одного и того же мудреца, то он бы, конечно, угадал. Но они «разбросаны» на разных мудрецов. Какая договорённость позволит им не ошибиться все шесть раз из шести? Ключ к решению – сумма номеров на всех шести шляпах. Если бы мы знали эту сумму, то каждый из мудрецов мог бы угадать свой номер, для этого достаточно вычесть из общей суммы все те номера, которые он видит на остальных. Это уже хорошо. Суммы мы не знаем, но каждый мудрец понимает, что она может принимать всего шесть разных последовательных значений – соответствующих его номеру от 1 до 6.



y = cos

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



y = 1 / x

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 5 \ 00 \\ \times 4 \ 2 \\ \hline 2 \ 1 \ 0 \\ + 8 \ 4 \\ \hline 105 \ 0 \ 00 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

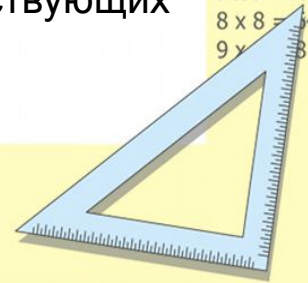


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

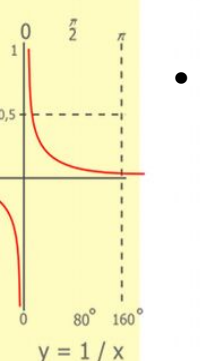
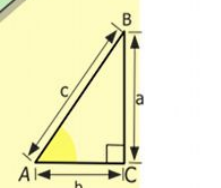
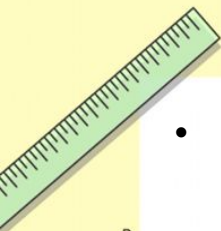


2. Шесть мудрецов по кругу

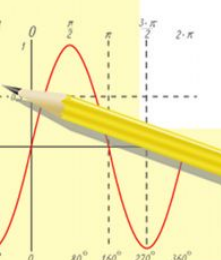
Король снова собрал своих мудрецов (на сей раз – шестерых) и велел им подготовиться к более сложному испытанию. В нём будут использованы шляпы шести цветов, причём среди шляп на разных мудрецах могут быть и одноцветные. Кто-нибудь из мудрецов должен верно определить цвет своей шляпы. Король также предупредил, что ответ «не знаю» он не примет. Мудрецы могут заранее обсудить задачу и договориться о том, как именно они будут действовать – но все их договорённости должны произойти до раздачи шляп. Потом, как и раньше, любое общение запрещено.

Решение (продолжение): Может ли первый спрошенный мудрец предположить, что его цвет шляпы – первый, а общая сумма – такая, которая получится с этим цветом? Да, может. Но даст ли это какую-то информацию второму мудрецу в тот момент, когда придет его очередь отвечать королю? Нет, потому что цвет первого мудреца он и так знает, а какая у того получалась сумма, не знает и знать не может. Этот путь – тупиковый.

Но зато первый мудрец может сделать аналогичное предположение об общей сумме – что она равна 1. Ой, но она не может быть равна 1 – в ней же должно быть шесть слагаемых, каждое от 1 до 6. Ну хорошо, тогда пусть она равна 7. Стоп, а если 7 тоже нельзя получить в сумме? Ладно, но уж какое-то одно число из списка 1, 7, 13, 19, 25, 31 точно можно получить! Да, можно, причём ровно одно – потому что суммы «накрывают» какой-то числовой отрезок длины 6, а в этом списке есть ровно одно пересечение с каждым таким отрезком. Сделав такое предположение, первый мудрец, конечно же, может вычислить свой номер и назвать его королю. Если предположение верное – мудрецы уже победили!



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 2500 \\ + 210 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

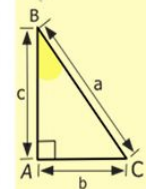


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

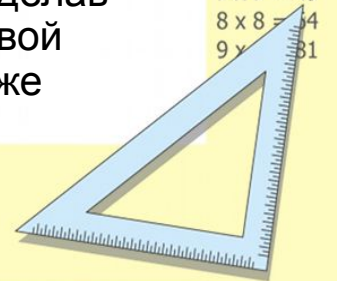
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$x = 70$$



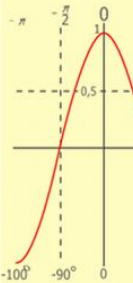
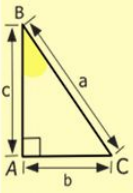
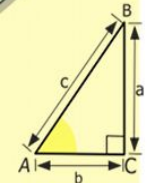
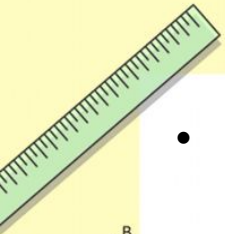
$$y = \cos$$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



2. Шесть мудрецов по кругу

- Король снова собрал своих мудрецов (на сей раз – шестерых) и велел им подготовиться к более сложному испытанию. В нём будут использованы шляпы шести цветов, причём среди шляп на разных мудрецах могут быть и одноцветные. Кто-нибудь из мудрецов должен верно определить цвет своей шляпы. Король также предупредил, что ответ «не знаю» он не примет. Мудрецы могут заранее обсудить задачу и договориться о том, как именно они будут действовать – но все их договорённости должны произойти до раздачи шляп. Потом, как и раньше, любое общение запрещено.
- Решение (окончание):** Ок. С предположением первого мудреца разобрались. А если оно неверно – что делать остальным? Ровно то же самое – второй спрошенный мудрец находит возможное значение суммы из списка вариантов 2, 8, 14, 20, 26, 32 и называет свой цвет исходя из этого предположения. Затем третий точно так же поступает с 3, 9, 15, 21, 27 и 33... В итоге хотя бы один из шести мудрецов (заметьте, на самом деле всегда ровно один!) сделает правильное предположение, а значит, верно назовёт свой номер.



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

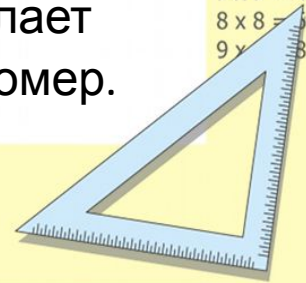


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

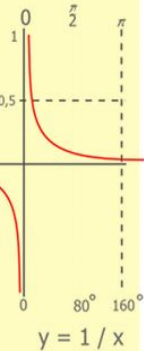
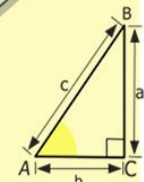
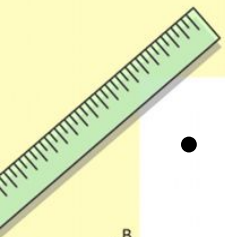
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

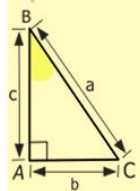
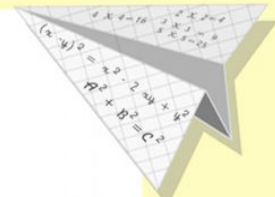
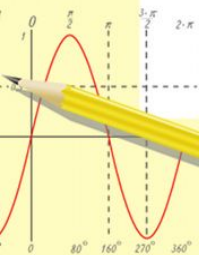


Как устроены наши задачи?

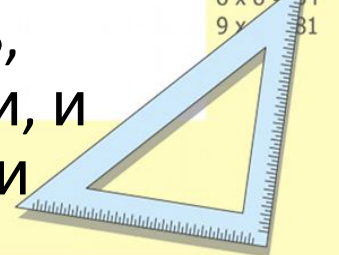
- В обоих предыдущих сюжетах все мудрецы обладали разной, но «симметричной» информацией, и их общей (кооперативной) целью было *поделиться информацией со всеми остальными*.
- Однако гораздо чаще передача информации по каналам связи происходит иначе – от «передатчика» к «приёмнику», то есть в одну сторону.
- В олимпиадных задачах такой механизм часто упаковывается в фабулу «математического фокуса», где есть *фокусник* – «приёмник», который должен что-то «угадать» (на самом деле – принять переданную ему информацию и правильно дешифровать её), а кроме него есть *зритель*, который вносит в фокус элемент случайности, и *ассистент (помощник) фокусника*, который и работает передатчиком.



$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 5\ 00 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} y = \sin 90^\circ \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{array}$$

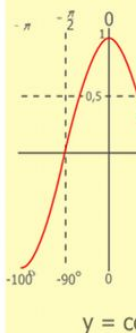
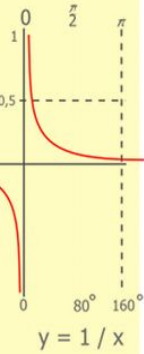
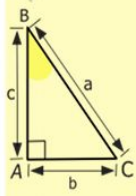
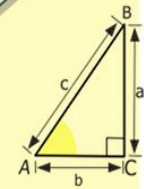
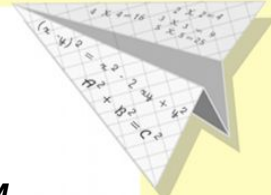
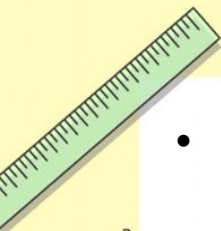
$$(x - 10)(x - 10) = x^2 - 20x + 100$$

$$x = 70$$

3. На сцену выходит фокусник

- Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из 101 цифры. Помощник фокусника накрывает две соседних цифры чёрным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). Как фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

(Это часть задачи, предлагавшейся на финале Всероссийской олимпиады в 2007 году. В оригинальной задаче не было числа 101, а предлагалось найти наименьшую длину последовательности цифр, при которой фокус можно гарантированно выполнить. Но нас пока интересует именно алгоритм действий, а не оценка.)



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

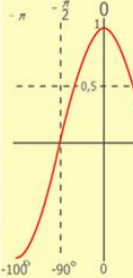
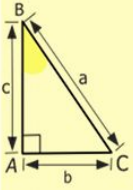
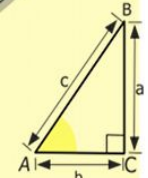
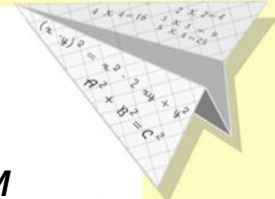
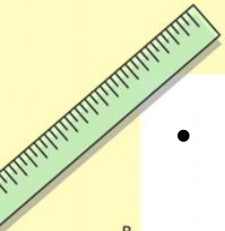
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



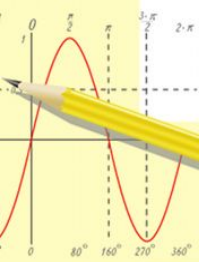
3. На сцену выходит фокусник

- Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из 101 цифры. Помощник фокусника накрывает две соседних цифры чёрным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). Как фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?
- Сценарий:** для воплощения этой задачи в лицах нужны двое учащихся, которые заранее будут знать «секрет фокуса». А еще лучше – показывать не полную версию, а уменьшенную – такую, в которой разрешены только цифры 0, 1 или 2, а последовательность имеет длину 10.
- Фокус нужно показать несколько раз. Те из учащихся-зрителей, которые сумеют самостоятельно понять (придумать) алгоритм для этого фокуса, смогут попробовать себя в роли помощника. Если фокусник правильно отгадывает закрытые цифры после того, как зритель их закрыл (для надёжности можно повторить угадывание несколько раз) – зритель считается успешно решившим задачу.



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

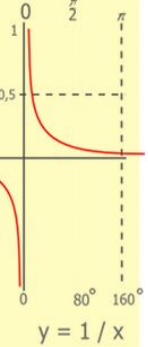
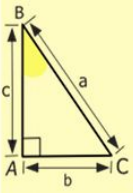
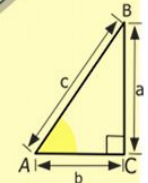
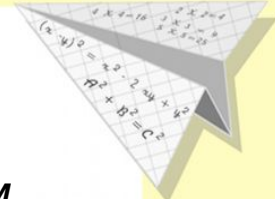
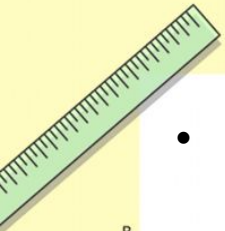
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$x = 70$$



3. На сцену выходит фокусник

- Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из 101 цифры. Помощник фокусника накрывает две соседних цифры чёрным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). Как фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?
- Решение:** Занумеруем все позиции слева направо числами от 0 до 100. Пусть сумма всех цифр на нечётных позициях имеет остаток o от деления на 10, а сумма всех цифр на чётных позициях имеет остаток p от деления на 10. Положим $n=10o+p$ и велит ассистенту закрывать цифры на позициях n и $n+1$. Увидев, какие цифры закрыты, фокусник моментально узнает номер n , то есть определит p и o . Одна закрытая цифра всегда стоит на нечётной позиции, а другая – на чётной. Вычислив сумму открытых цифр на нечётных позициях и зная общую сумму o , фокусник определит закрытую цифру, стоящую на нечётной позиции. Аналогично определяется закрытая цифра, стоящая на чётной позиции.



$$\begin{array}{r} 12500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

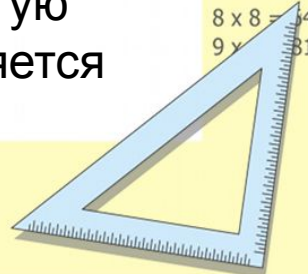
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



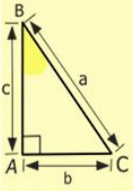
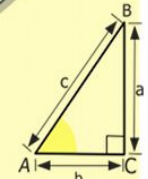
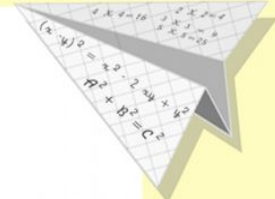
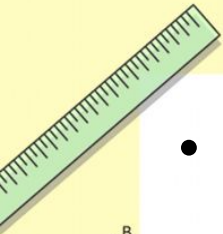
$$\begin{cases} x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



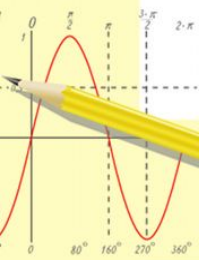
4. Семь чисел

- На доске написаны числа от 1 до 7. Зритель вычёркивает какие-то два числа, после чего ассистент фокусника вычёркивает еще какие-то два числа. Затем входит фокусник. Его задача – определить, какие именно числа были вычеркнуты зрителем. Как договориться, чтобы этот фокус гарантированно удавался?



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

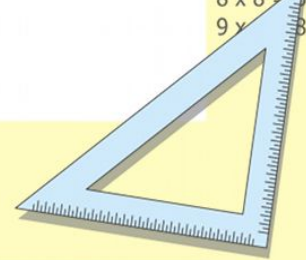
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

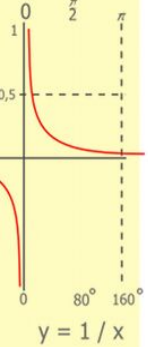
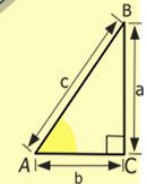
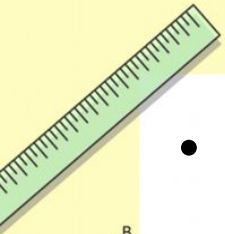
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

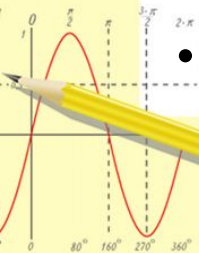


4. Семь чисел

- На доске написаны числа от 1 до 7. Зритель вычёркивает какие-то два числа, после чего ассистент фокусника вычёркивает еще какие-то два числа. Затем входит фокусник. Его задача – определить, какие именно числа были вычеркнуты зрителем. Как договориться, чтобы этот фокус гарантированно удавался?
- **Сценарий:** снова нужны двое учащихся, ознакомленных с секретом фокуса. Они будут играть роль ассистента и фокусника.
- При первом показе можно даже сыграть «отсутствие ассистента» – просто сначала учитель зовёт первого зрителя, а потом второго. Остальные зрители в этот момент не знают, что второй – «подставной».
- Догадка об этом – важная часть решения задачи.



$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

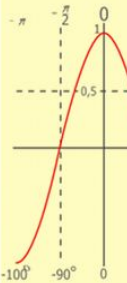
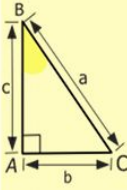
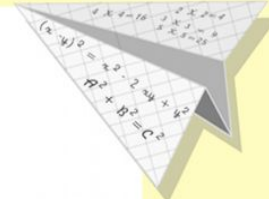


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



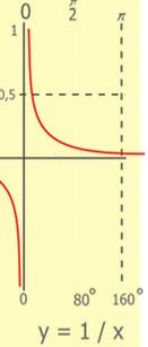
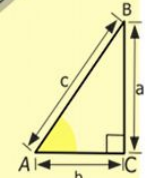
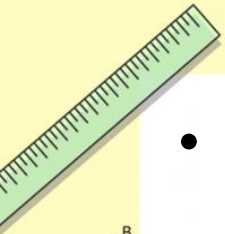
$$y = \cos$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$

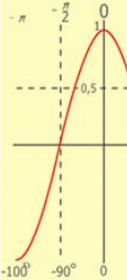
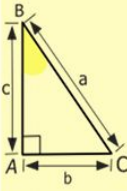
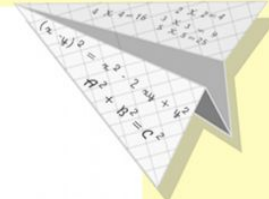
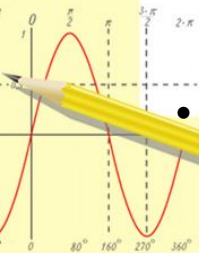


4. Семь чисел

- На доске написаны числа от 1 до 7. Зритель вычёркивает какие-то два числа, после чего ассистент фокусника вычёркивает еще какие-то два числа. Затем входит фокусник. Его задача – определить, какие именно числа были вычеркнуты зрителем. Как договориться, чтобы этот фокус гарантированно удавался?
- **Решение (начало):** воспользуемся геометрической интерпретацией – будем считать, что числа соответствуют вершинам правильного семиугольника, а пары чисел – его сторонам и диагоналям.
- Суть фокуса сводится к следующему: зритель выбирает по своему усмотрению любую сторону или диагональ, помощник должен выбрать другую сторону или диагональ, не имеющую с первой общих вершин, а фокусник по трём оставшимся вершинам должен восстановить, какие именно отрезки (из 6 возможных отрезков между отсутствующими четырьмя вершинами) кем именно были выбраны.
- Есть много годных вариантов договоренностей между помощником и фокусником (и ни одной «самой естественной»).

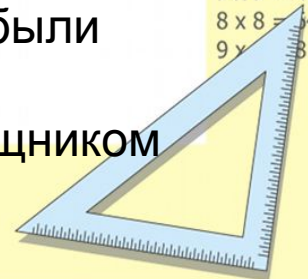


$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 2500 \\ + 210 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$y = \cos(x)$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$y = \sin 90^\circ$$

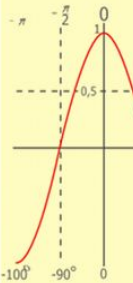
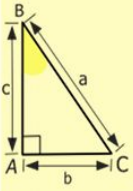
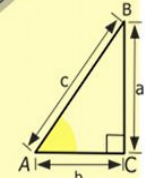
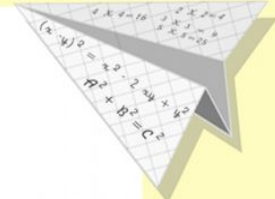
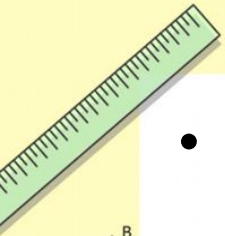
$$x = 25 + 45$$

$$x = 70$$

$$(x-y) = x^2 - y^2$$

4. Семь чисел

- На доске написаны числа от 1 до 7. Зритель вычёркивает какие-то два числа, после чего ассистент фокусника вычёркивает еще какие-то два числа. Затем входит фокусник. Его задача – определить, какие именно числа были вычеркнуты зрителем. Как договориться, чтобы этот фокус гарантированно удавался?
- **Решение (окончание):** Разобьём все стороны и диагонали на три цикла длины 7 – цикл 1234567, цикл 1357246 и цикл 1473625. Если зритель берет отрезок из какого-то цикла, то ассистент отвечает другим отрезком из того же самого цикла.
- Тогда фокусник сможет определить цикл (тот, в котором три оставшихся вершины являются соседними). Но как ему понять, какой из двух отрезков этого цикла вычеркнул зритель, а какой – его помощник?
- А это тоже часть предварительной договоренности – например, фокусник знает, что помощник всегда берет пару вершин, СЛЕДУЮЩЮЮ В ЦИКЛЕ за парой, взятой зрителем.



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

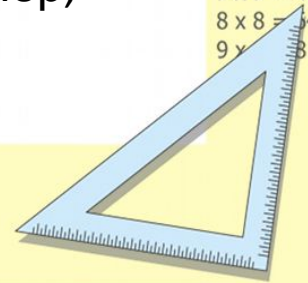
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



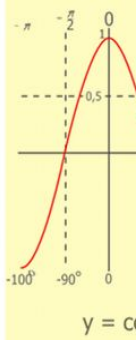
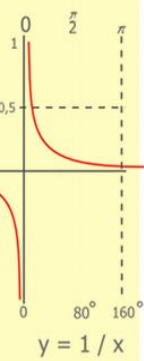
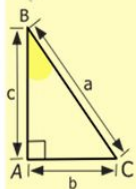
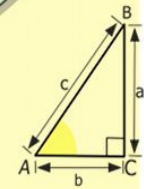
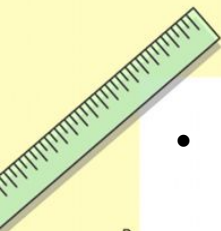
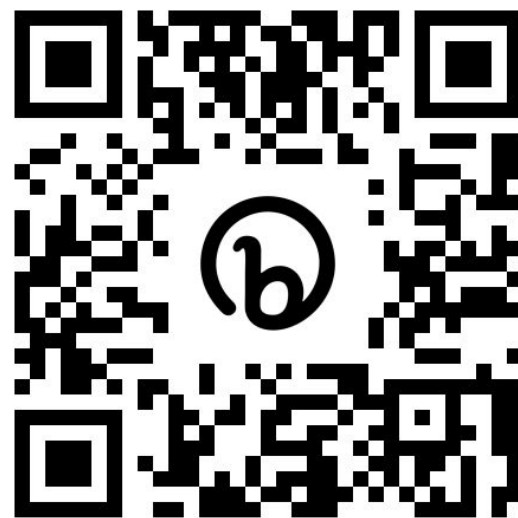
$$\begin{cases} y = \sin 90^\circ \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Вместо послесловия

- Я рассказал всего о четырёх сюжетах. Конечно же, их намного больше.
- Около трёх десятков задач приведены на сайте [problems.ru](https://www.problems.ru) в теме «Кооперативные алгоритмы».
https://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=1899
- В документе, на основе которого я делал эту презентацию, приведены без решения еще 15 подобных задач (хотя некоторые из них есть и на сайте [problems.ru](https://www.problems.ru)). Этот документ <https://bit.ly/mudr2023> или через QR-код



$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 00 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

