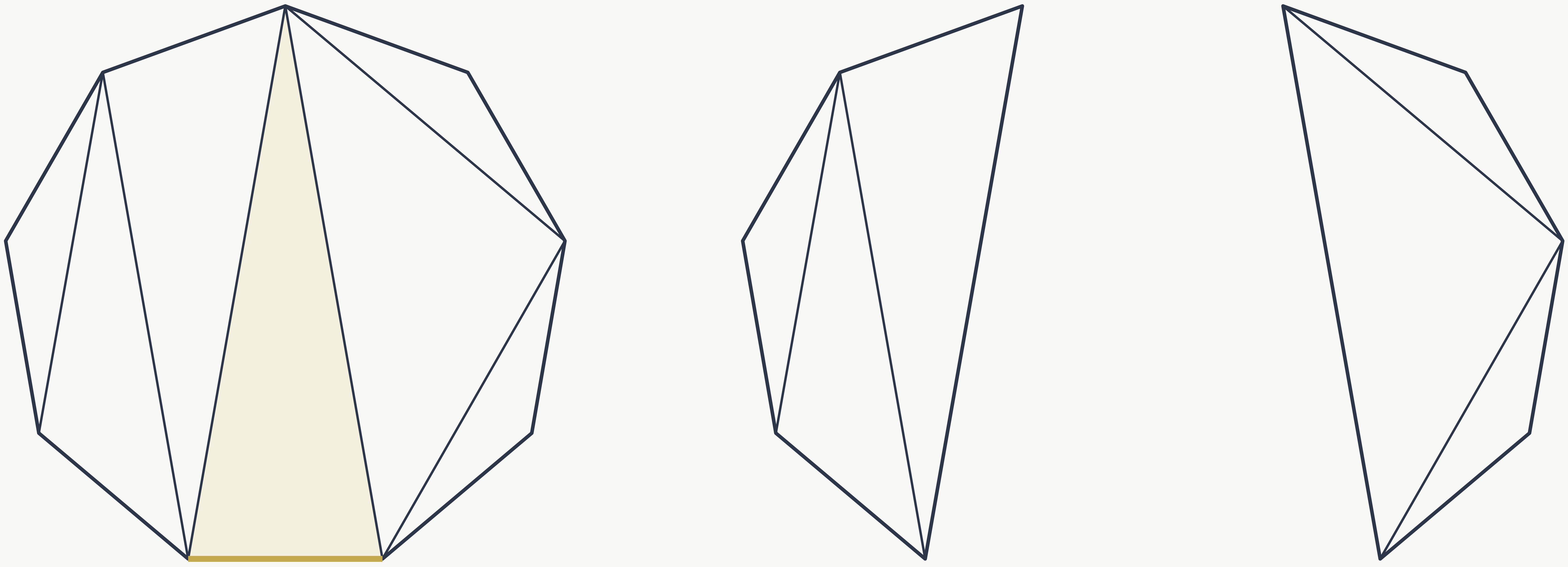
КОМБИНАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА

СМАРТ-КЕНГУРУ, 2 4 2026



ПРО МЕНЯ

- Закончил **Матфак ВШЭ**
- Работаю в **179** школе
- Преподаю математику школьникам, студентам и взрослым, организую математические события
- Веду телеграм-канал **Кроссворд Тьюринга** **@turings_crossword**
- Телеграм **@d1_d57**

Главный вопрос перечислительной комбинаторики – найти число объектов, не выписывая их все. Для этого задачу сводят к более простым (например по правилу суммы/произведения)
Если есть **2 способа** это сделать, возникает равенство ответов

Мы пойдем **в обратном направлении:** от тождества к задаче, два решения которой дадут нужное равенство

Главный вопрос перечислительной комбинаторики — найти число объектов, не выписывая их все. Для этого задачу сводят к более простым (например по правилу суммы/произведения)
Если есть 2 способа это сделать, возникает равенство ответов

Мы пойдем в обратном направлении: от тождества к задаче, два решения которой дадут нужное равенство

Самый простой пример:

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$$

Какая задача тут скрыта?

Главный вопрос перечислительной комбинаторики — найти число объектов, не выписывая их все. Для этого задачу сводят к более простым (например по правилу суммы/произведения)
Если есть 2 способа это сделать, возникает равенство ответов

Мы пойдем в обратном направлении: от тождества к задаче, два решения которой дадут нужное равенство

Самый простой пример:

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$$

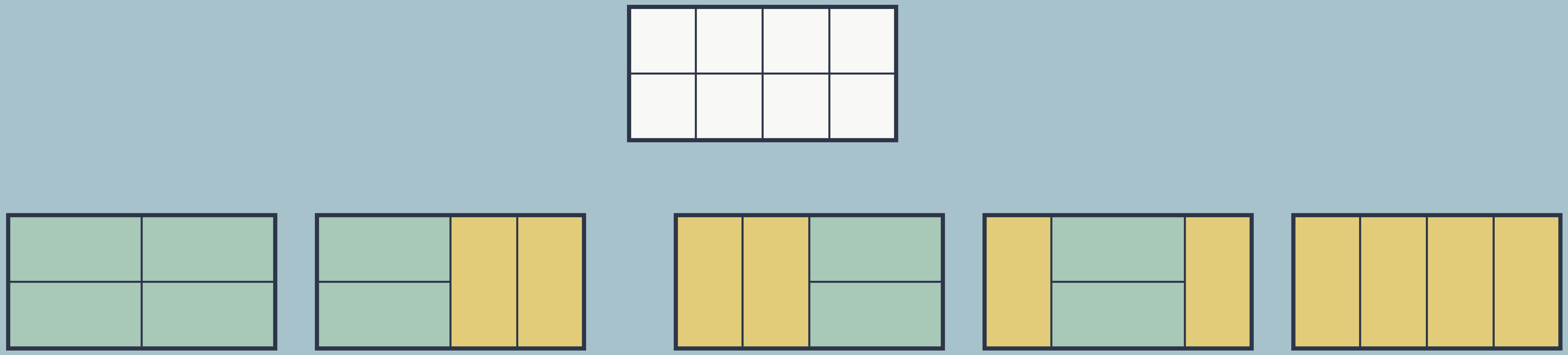
Какая задача тут скрыта?

Я собрал самые важные и красивые комбинаторные тождества.
Они связаны с **числами Фибоначчи, сочетаний и Каталана**.
Каждое доказательство можно увидеть, посмотрев на картинку

Сколько всего замощений прямоугольника 2 x n доминошками?

Сколько всего замощений прямоугольника **2 x n** доминошками?

Это **числа Фибоначчи** $f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

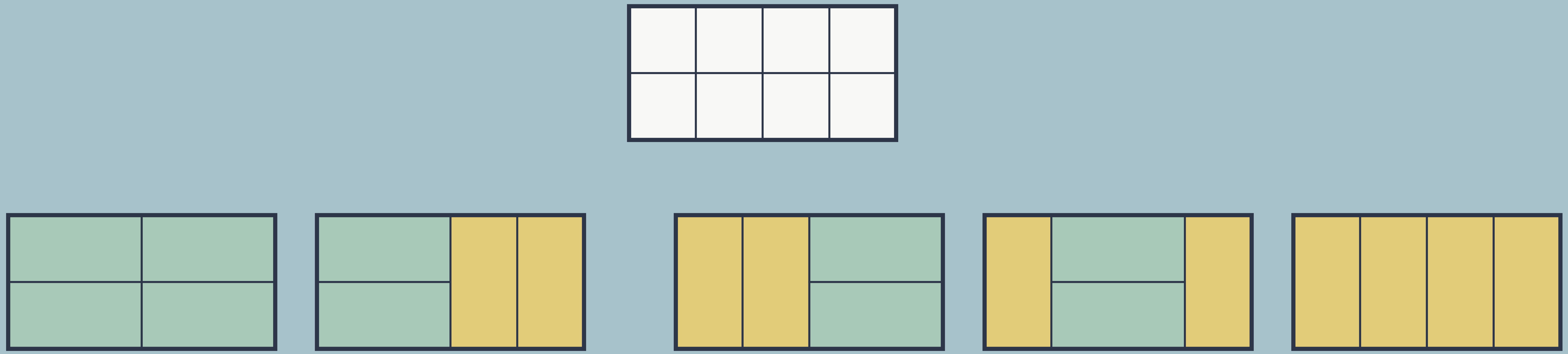


Сколько всего замощений прямоугольника **$2 \times n$** доминошками?

Это числа Фибоначчи $\mathbf{f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}$

Они же возникают как количество:

- разбиений полоски длины **n** на квадратики и доминошки
- подмножеств **$\{1, \ldots, n-1\}$** без соседних элементов
- строк из **0** и **1** длины **$n-1$** без двух единиц подряд...

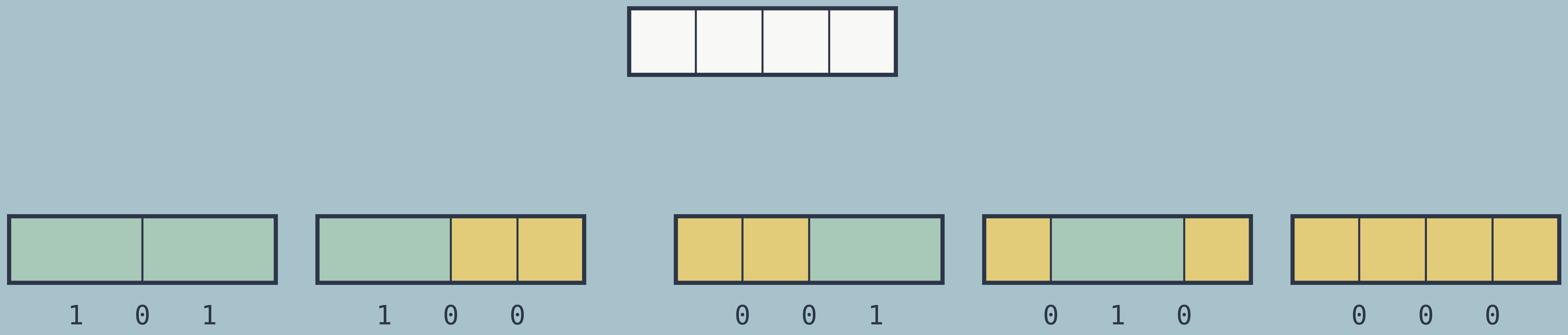


Сколько всего замощений прямоугольника **2 x n** доминошками?

Это числа Фибоначчи $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

Они же возникают как количество:

- разбиений полоски длины **n** на квадратики и доминошки
- подмножеств **{1, ..., n-1}** без соседних элементов
- строк из **0** и **1** длины **n-1** без двух единиц подряд...

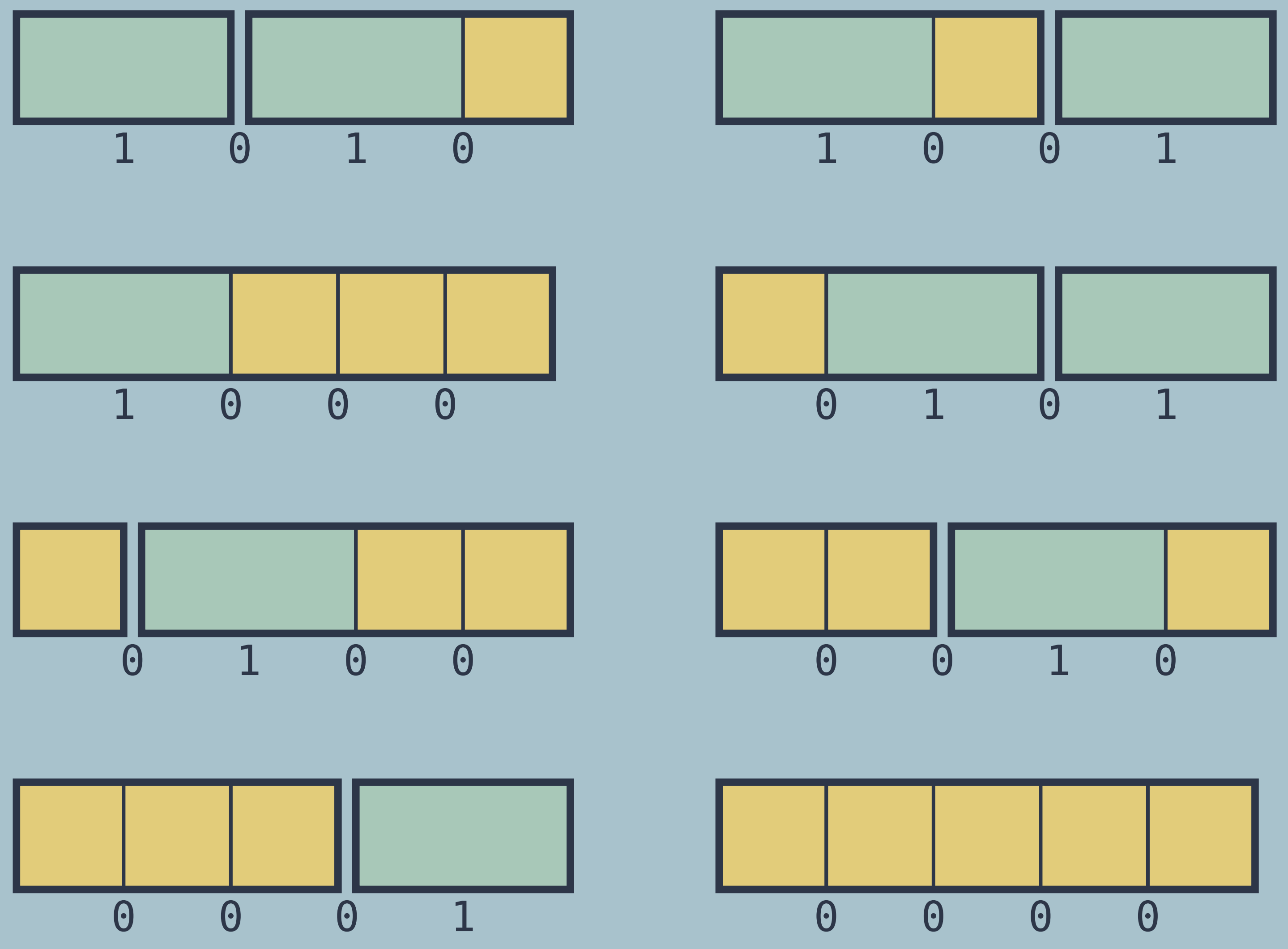


Тождества для чисел Фибоначчи

- $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$

Тождества для чисел Фибоначчи

- $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$

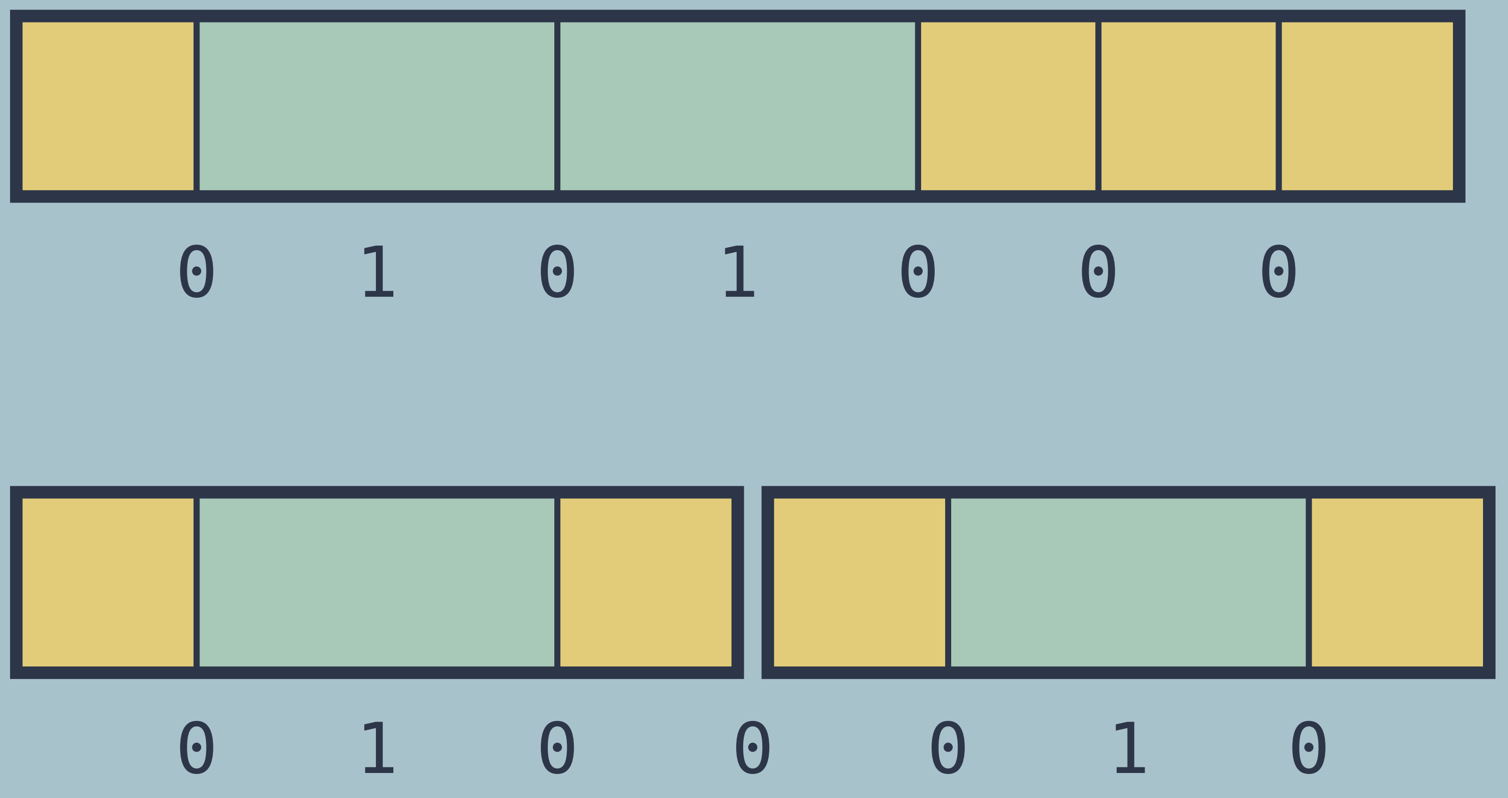


Тождества для чисел Фибоначчи

- $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$
- **$f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n}$**

Тождества для чисел Фибоначчи

- $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$
- $\mathbf{f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n}}$

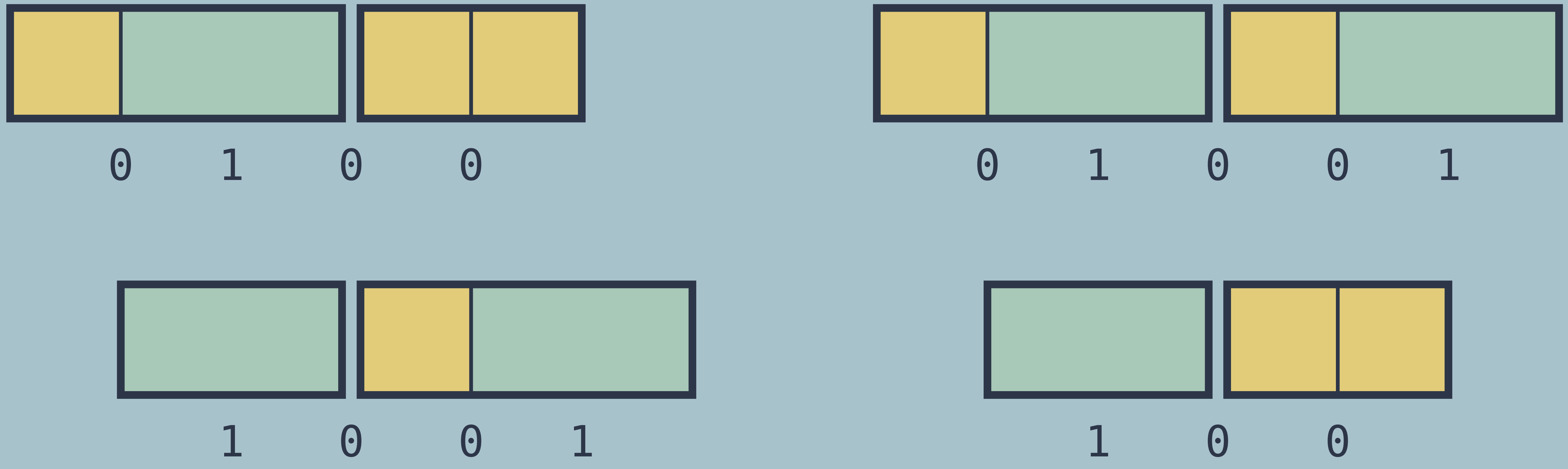


Тождества для чисел Фибоначчи

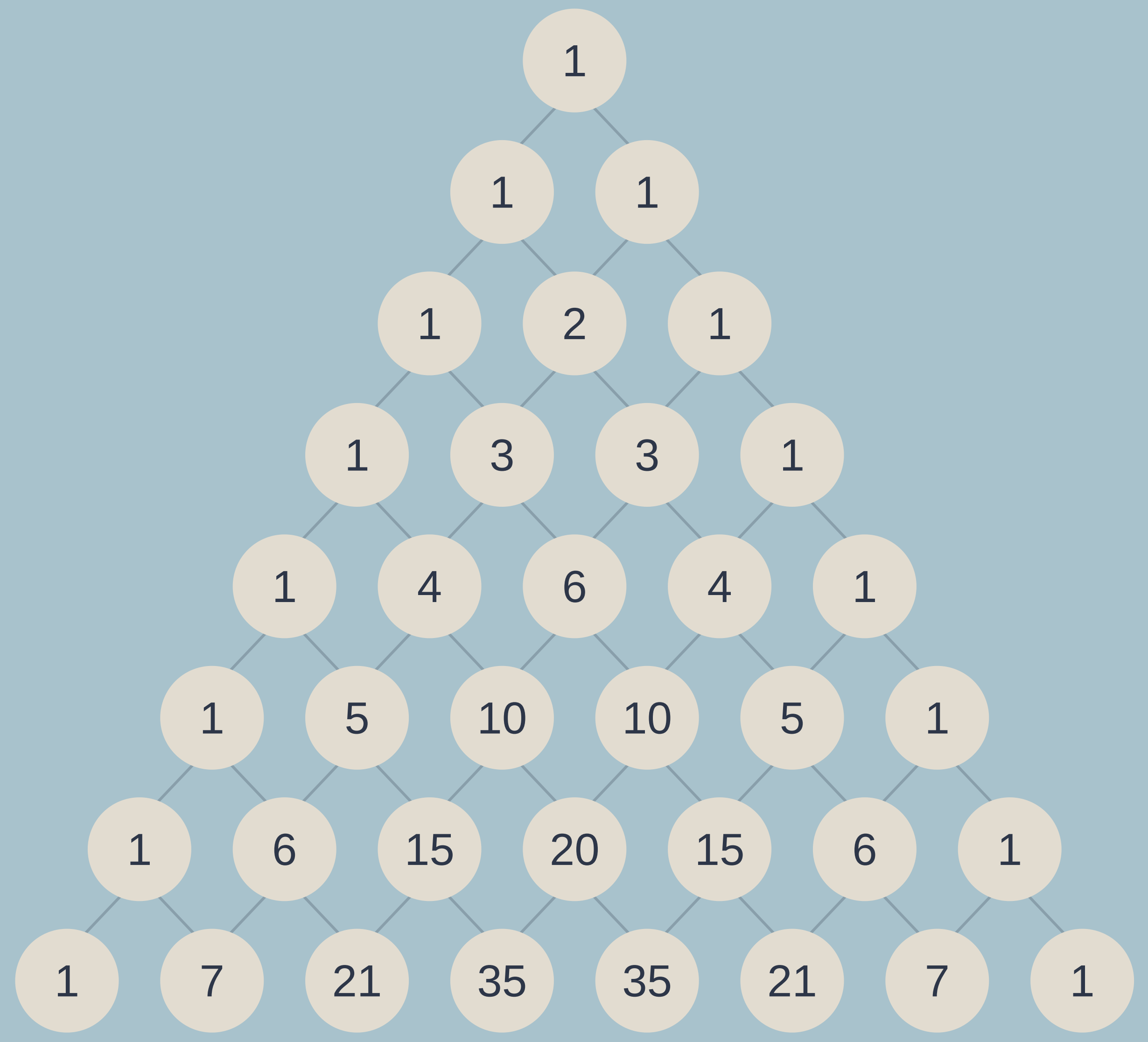
- $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$
- $f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n}$
- **$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n$**

Тождества для чисел Фибоначчи

- $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$
- $f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n}$
- $\mathbf{f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n}$

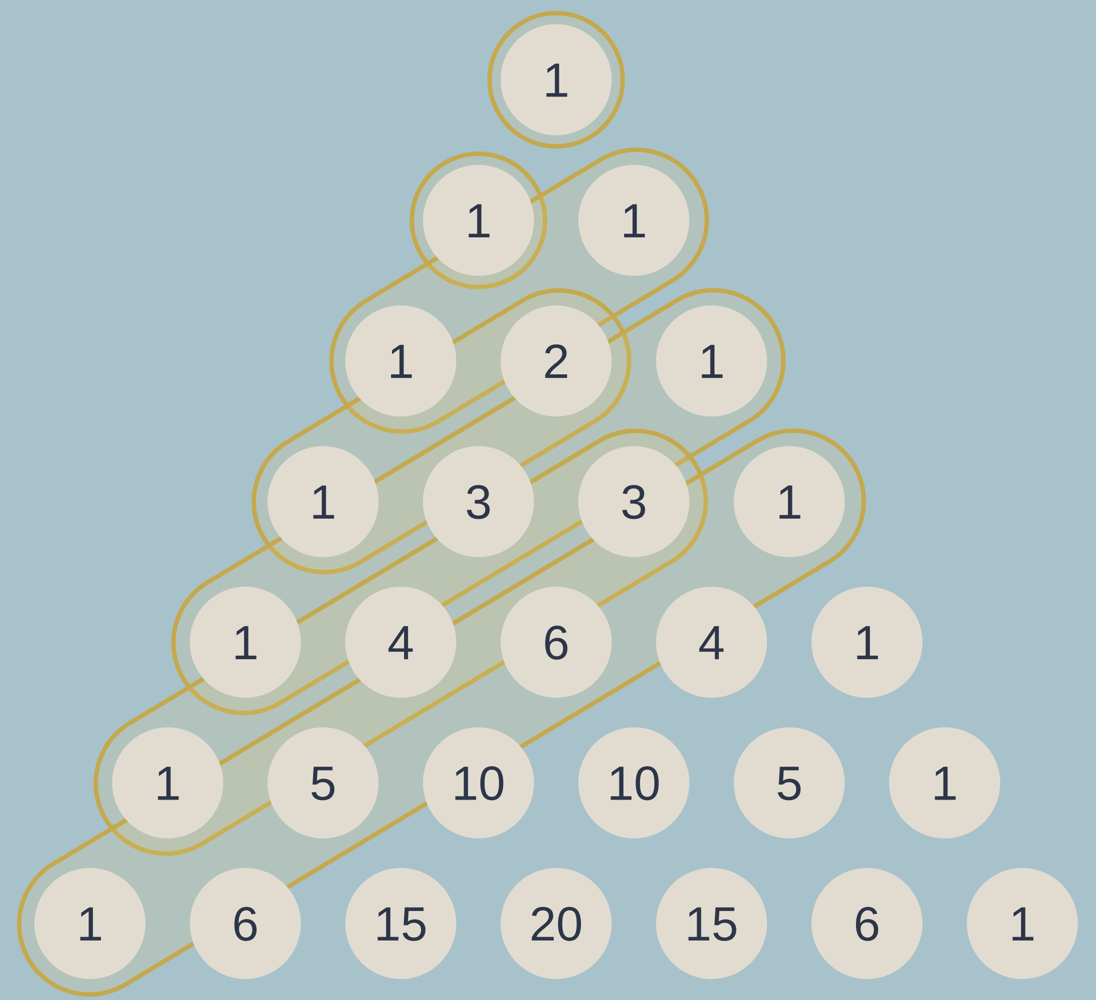


Числа Фибоначчи в треугольнике Паскаля



Числа Фибоначчи в треугольнике Паскаля

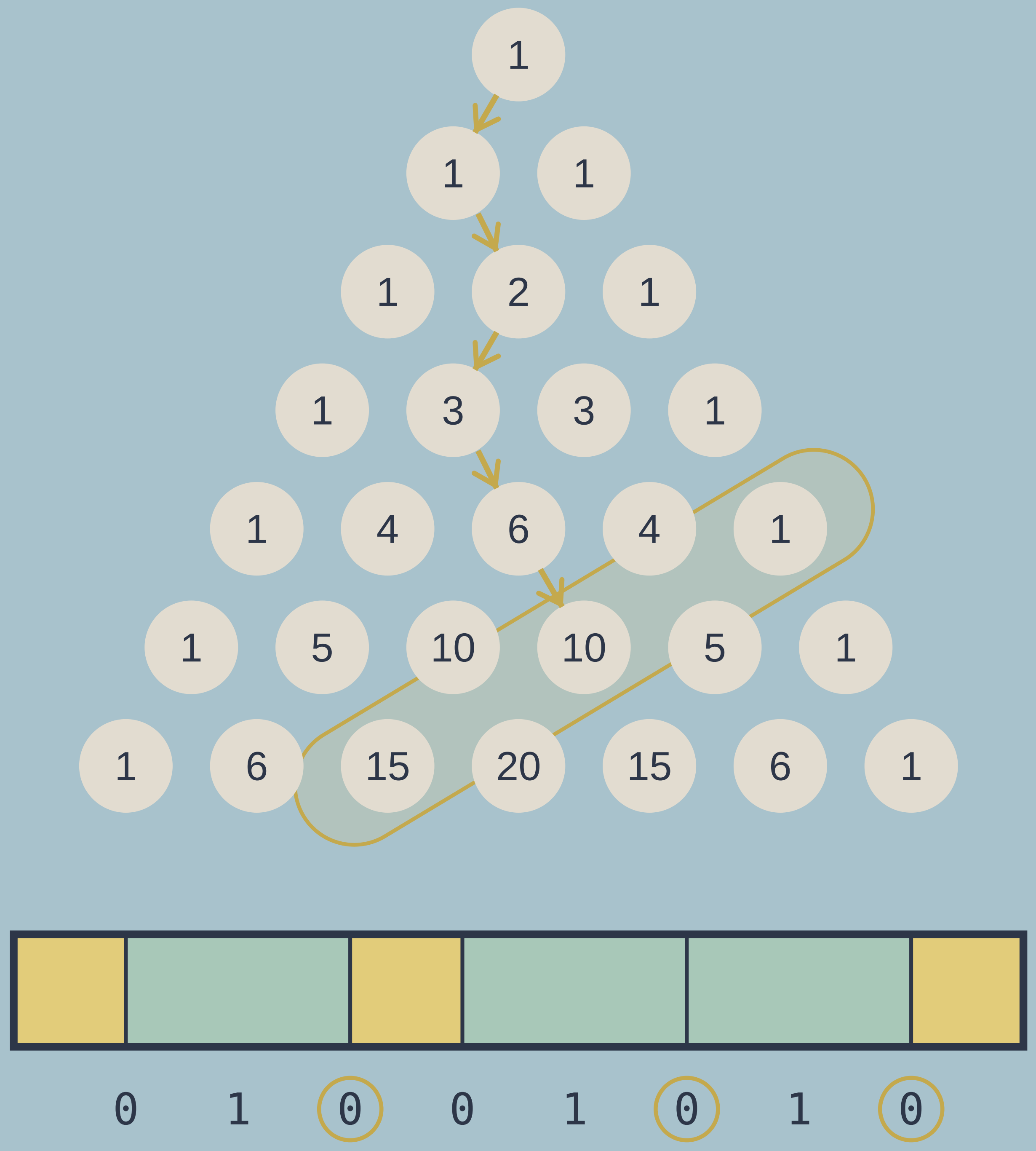
$$f_n = C(n-1,0) + C(n-2,1) + C(n-3,2) + \ldots$$



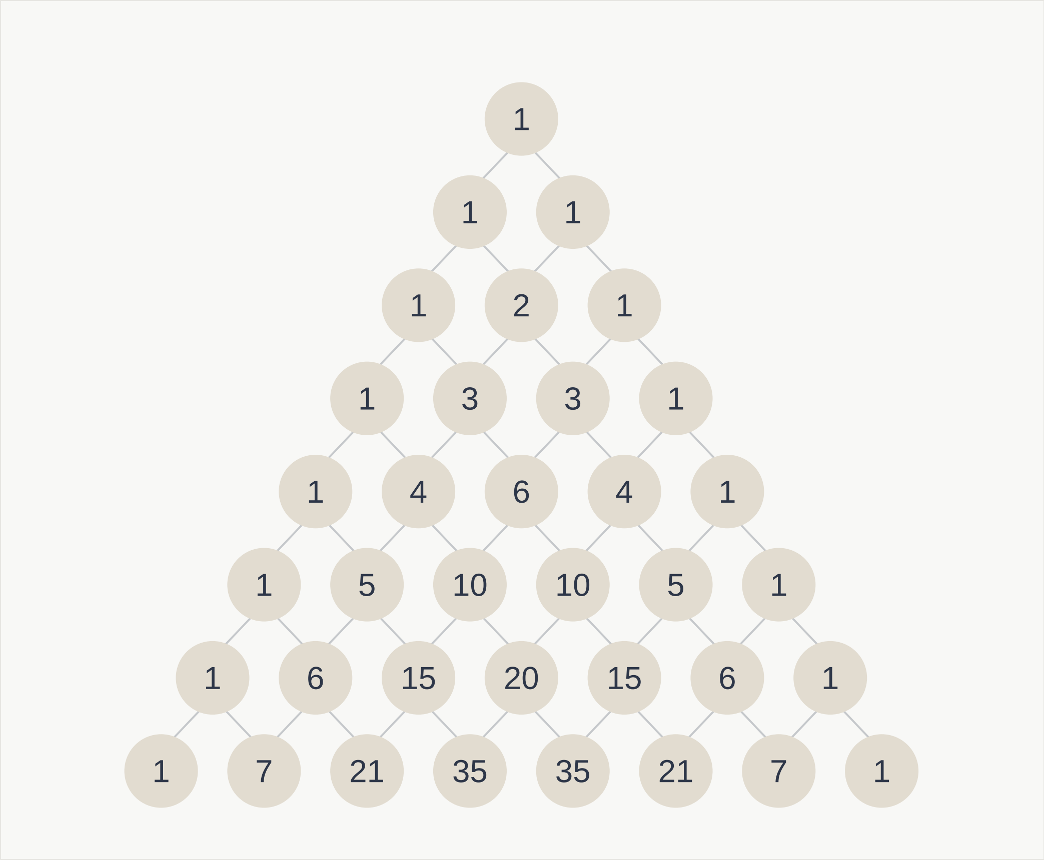
Числа Фибоначчи в треугольнике Паскаля

$$f_n = C(n-1,0) + C(n-2,1) + C(n-3,2) + \ldots$$

Удалим/допишем по одному нулю после каждой единицы

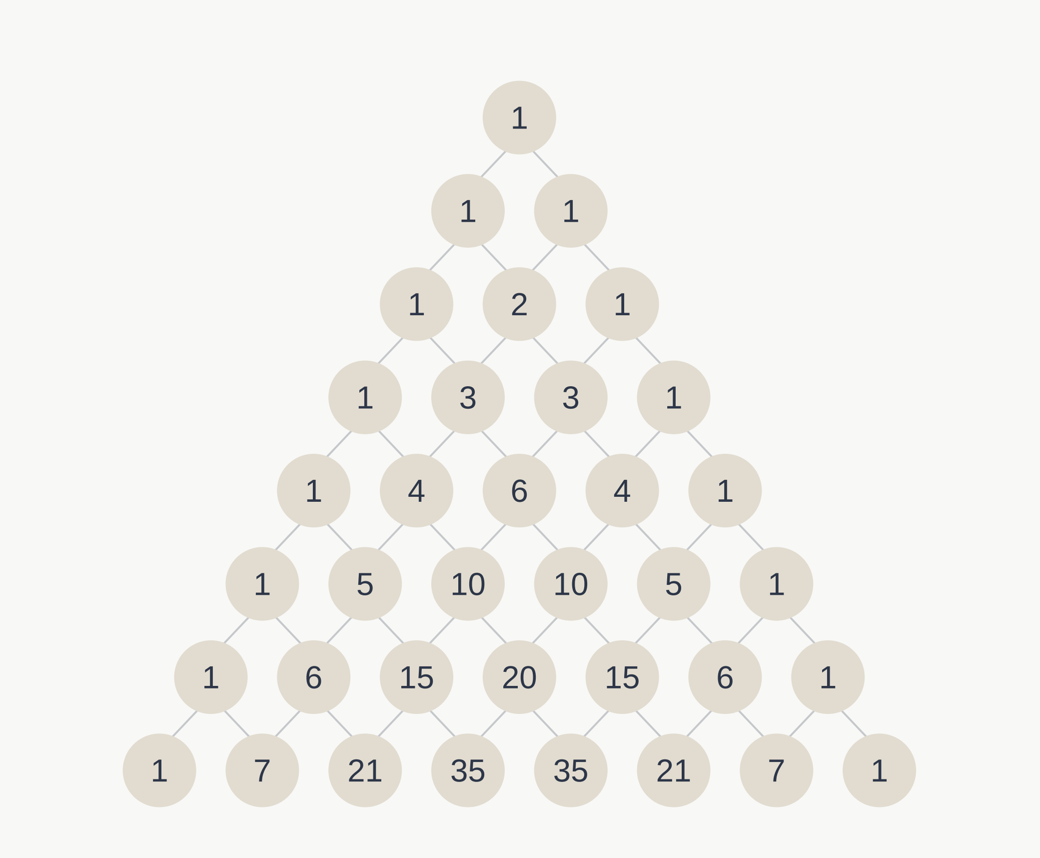


Биномиальные тождества



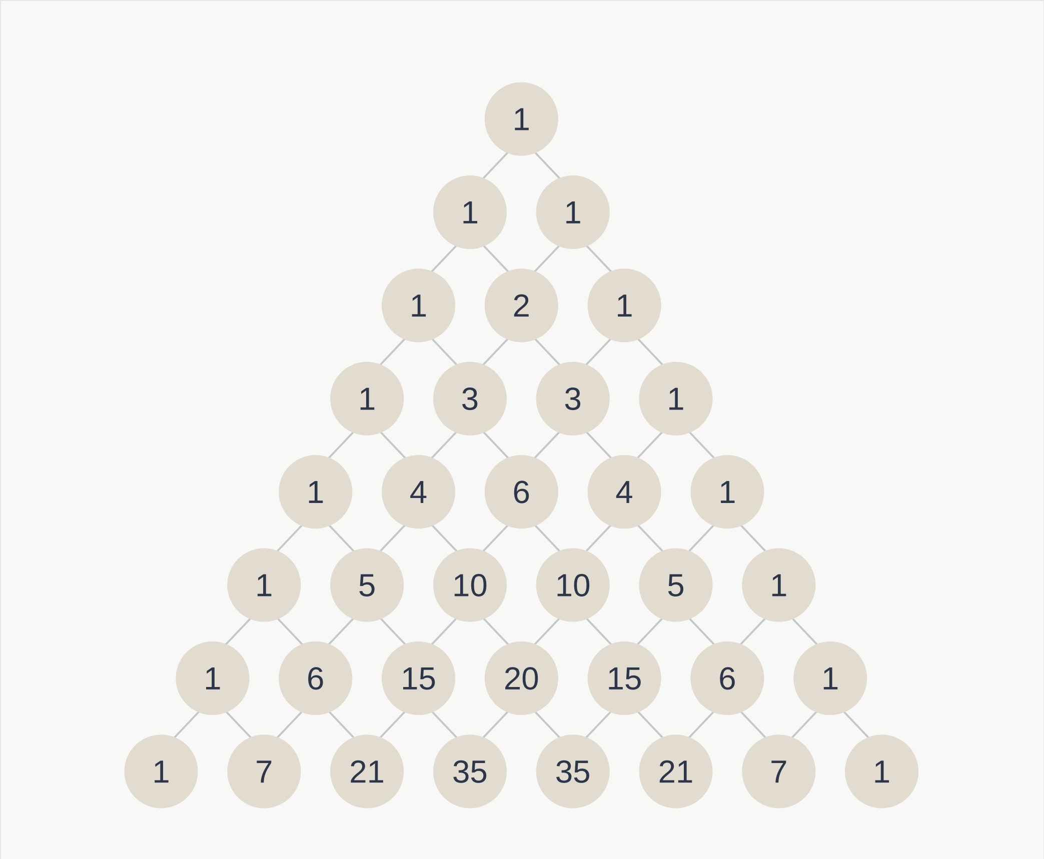
Биномиальные тождества

- **C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - ... ± C(n,n) = 0**



Биномиальные тождества

- **C(n,0) – C(n,1) + C(n,2) – ... ± C(n,n) = 0**

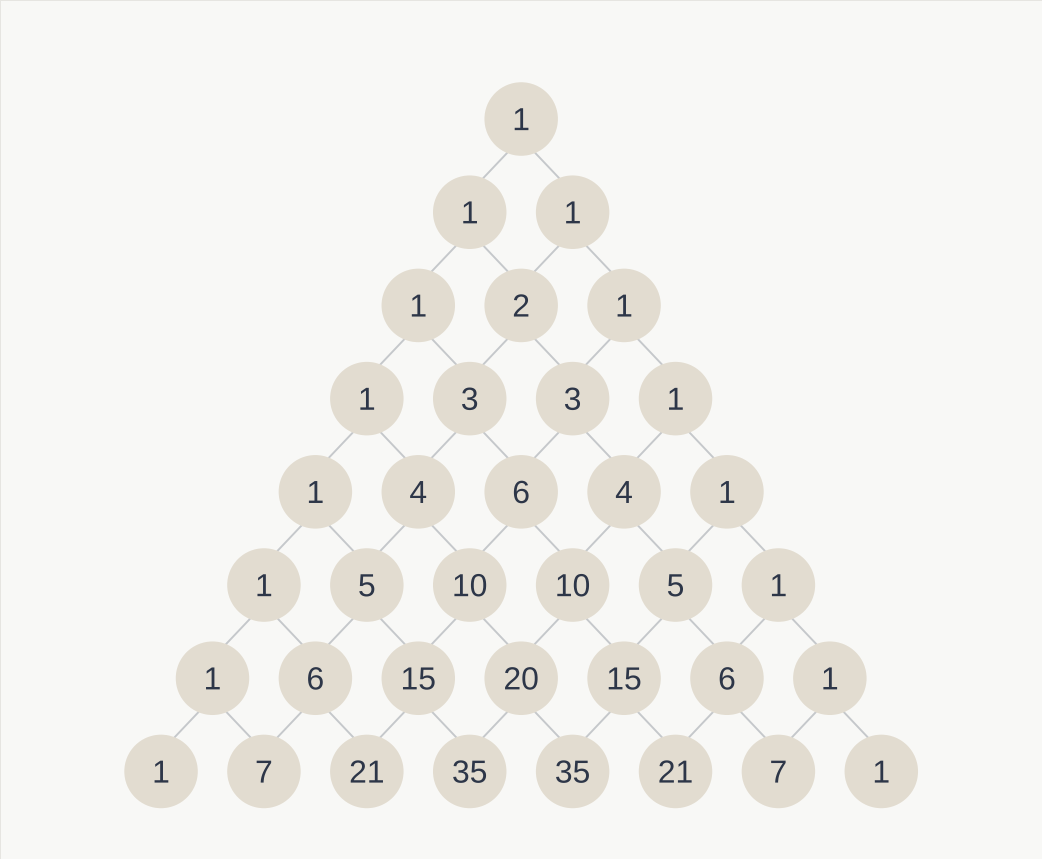


1	0	1	1	0	0	1	0	1	0

1	0	1	1	0	0	1	0	1	1

Биномиальные тождества

- $C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \ldots \pm C(n,n) = 0$
- **$C(n,1) + 2\,C(n,2) + \ldots + n\,C(n,n) = n\,2^{n-1}$**

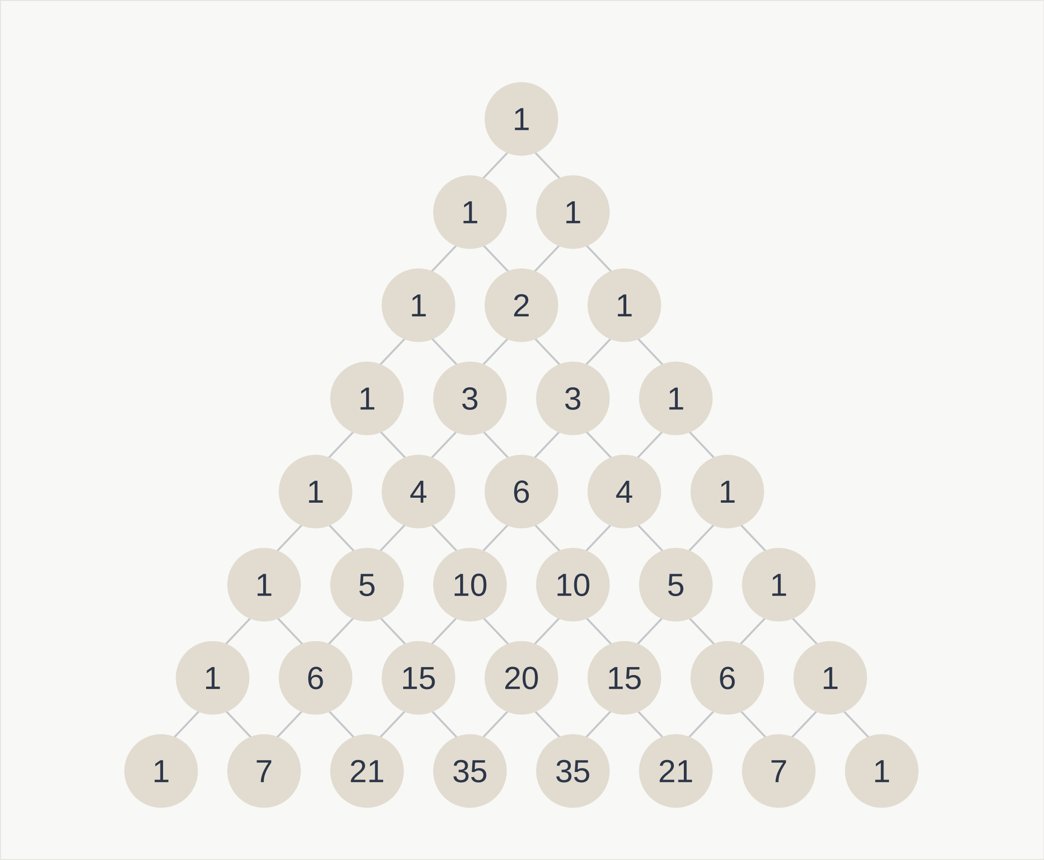


1	0	1	1	0	0	1	0	1	0

1	0	1	1	0	0	1	0	1	1

Биномиальные тождества

- $C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \ldots \pm C(n,n) = 0$
- $\mathbf{C(n,1) + 2\,C(n,2) + \ldots + n\,C(n,n) = n\,2^{n-1}}$



1	0	1	1	0	0	1	0	1	0

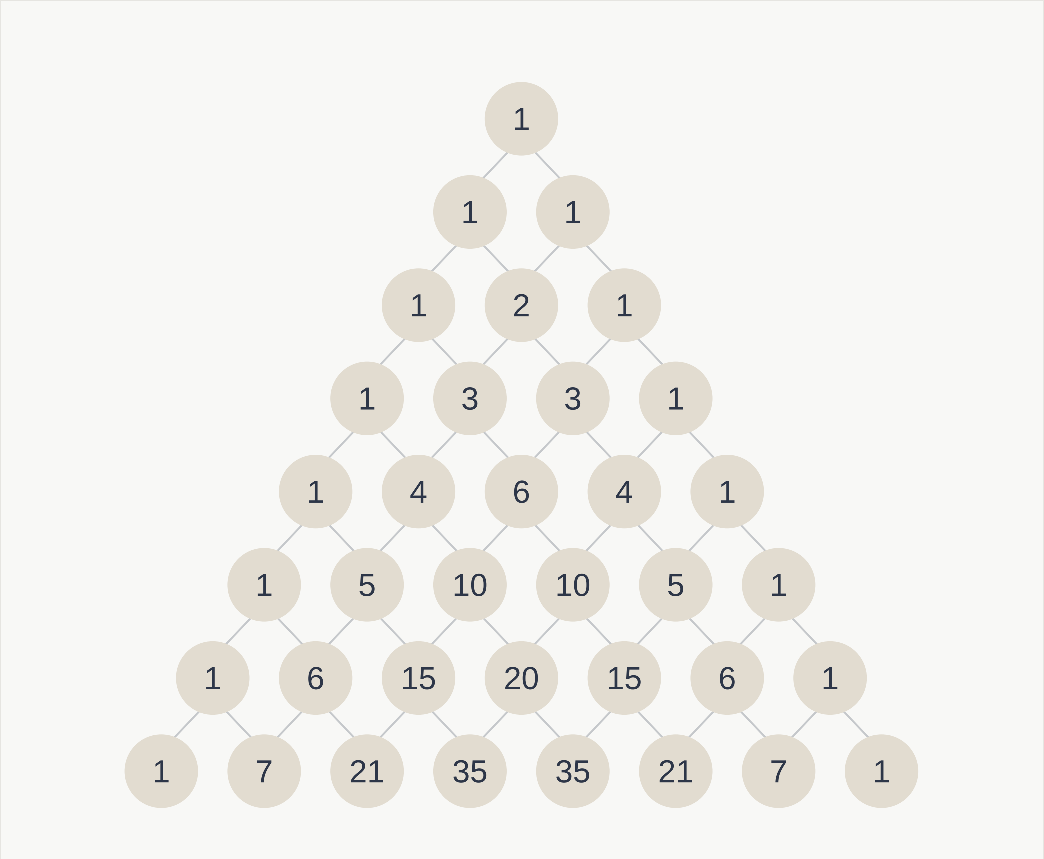
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1

1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

1	0	1	2	0	0	1	0	0	1

Биномиальные тождества

- $C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \ldots \pm C(n,n) = 0$
- $C(n,1) + 2\,C(n,2) + \ldots + n\,C(n,n) = n\,2^{n-1}$
- **$C(r,r) + C(r+1,r) + \ldots + C(n,r) = C(n+1,r+1)$**



1	0	1	1	0	0	1	0	1	0

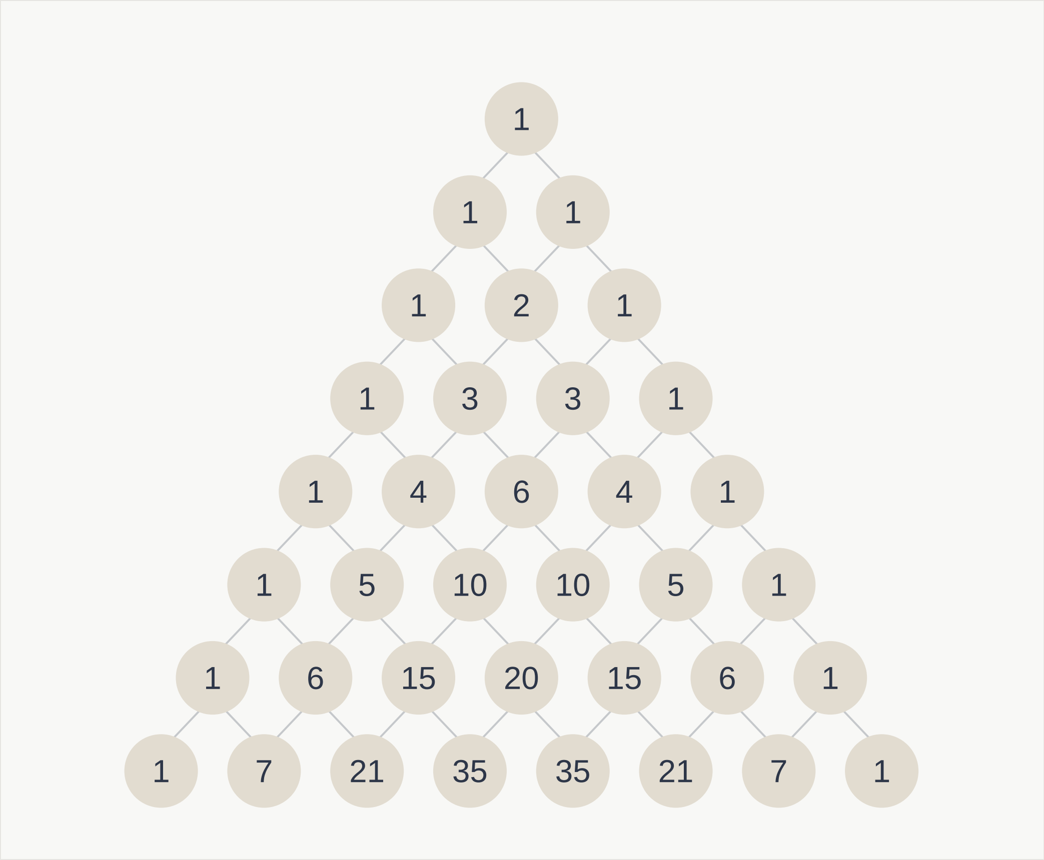
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1

1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

1	0	1	2	0	0	1	0	0	1

Биномиальные тождества

- $C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \ldots \pm C(n,n) = 0$
- $C(n,1) + 2\,C(n,2) + \ldots + n\,C(n,n) = n\,2^{n-1}$
- **$C(r,r) + C(r+1,r) + \ldots + C(n,r) = C(n+1,r+1)$**



1	0	1	1	0	0	1	0	1	0

1	0	1	1	0	0	1	0	1	1

1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

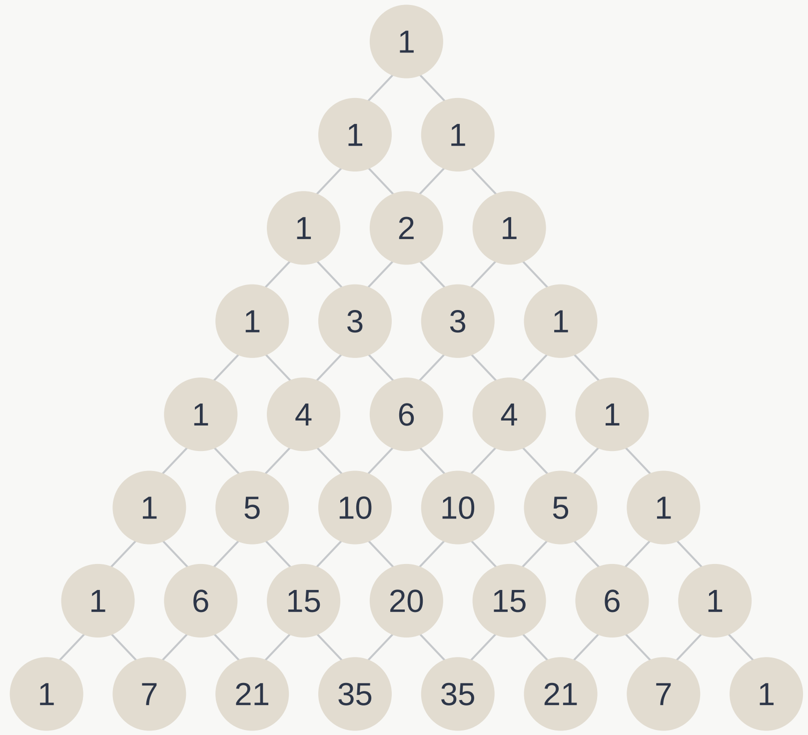
1	0	1	2	0	0	1	0	0	1

1	0	1	0	1	0	1

1	0	1	0	1	0	1	0	0	0

Биномиальные тождества

- $C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \ldots \pm C(n,n) = 0$
- $C(n,1) + 2\,C(n,2) + \ldots + n\,C(n,n) = n\,2^{n-1}$
- $C(r,r) + C(r+1,r) + \ldots + C(n,r) = C(n+1,r+1)$
- $\mathbf{C(n,0)^2 + C(n,1)^2 + \ldots + C(n,n)^2 = C(2n,n)}$



1	0	1	1	0	0	1	0	1	0

1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

1	0	1	0	1	0	1

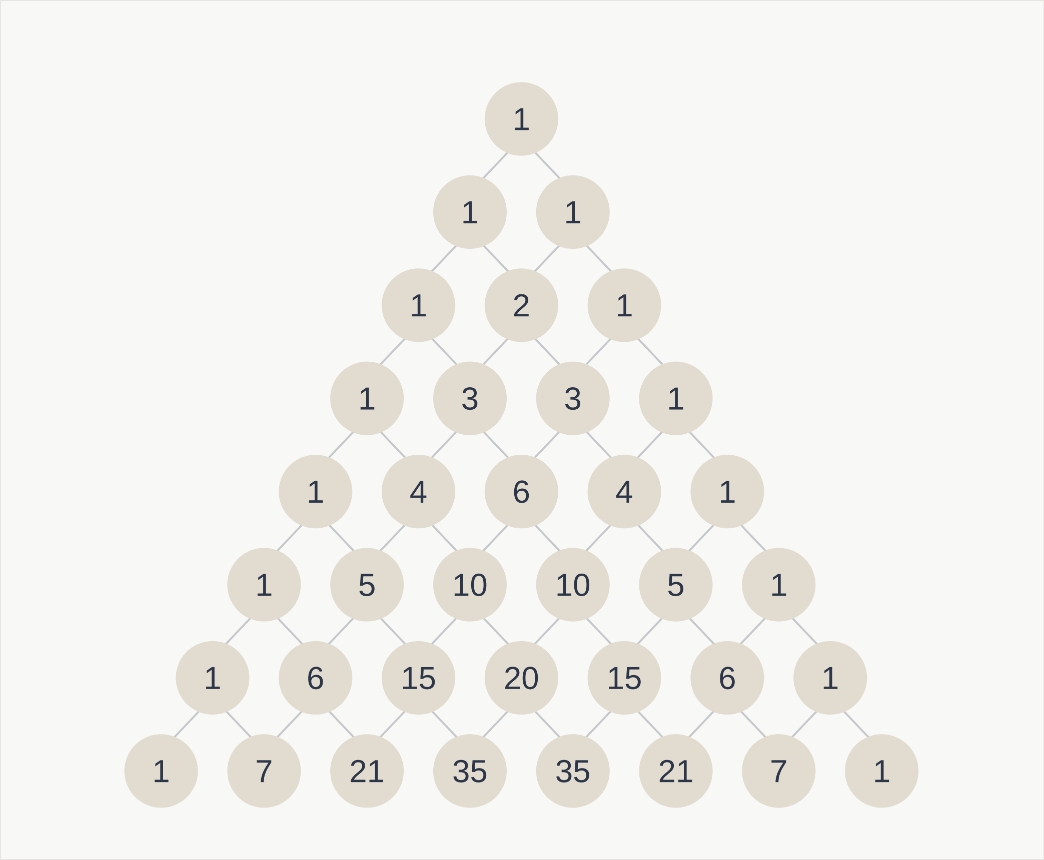
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1

1	0	1	2	0	0	1	0	0	1

1	0	1	0	1	0	1	0	0	0

Биномиальные тождества

- $C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \ldots \pm C(n,n) = 0$
- $C(n,1) + 2\,C(n,2) + \ldots + n\,C(n,n) = n\,2^{n-1}$
- $C(r,r) + C(r+1,r) + \ldots + C(n,r) = C(n+1,r+1)$
- $\mathbf{C(n,0)^2 + C(n,1)^2 + \ldots + C(n,n)^2 = C(2n,n)}$



1	0	1	1	0	0	1	0	1	0

1	0	1	1	0	0	1	0	1	1

1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

1	0	1	2	0	0	1	0	0	1

1	0	1	0	1	0	1

1	0	1	0	1	0	1	0	0	0

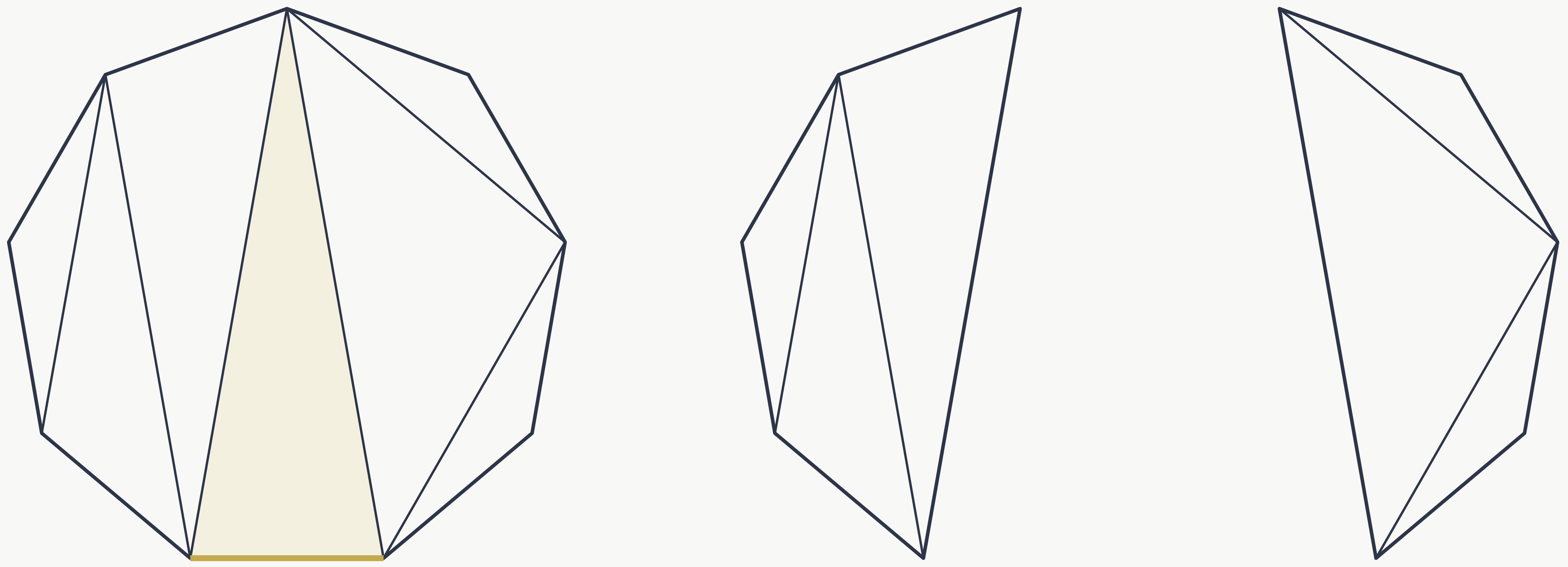
1	1	0	1	0

1	0	1	1	0

1	1	0	1	0	0	1	0	0	1

Сколько существует триангуляций выпуклого (**n+2**)-угольника?

Это **числа Каталана** $c_0 = 1,\ c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0$

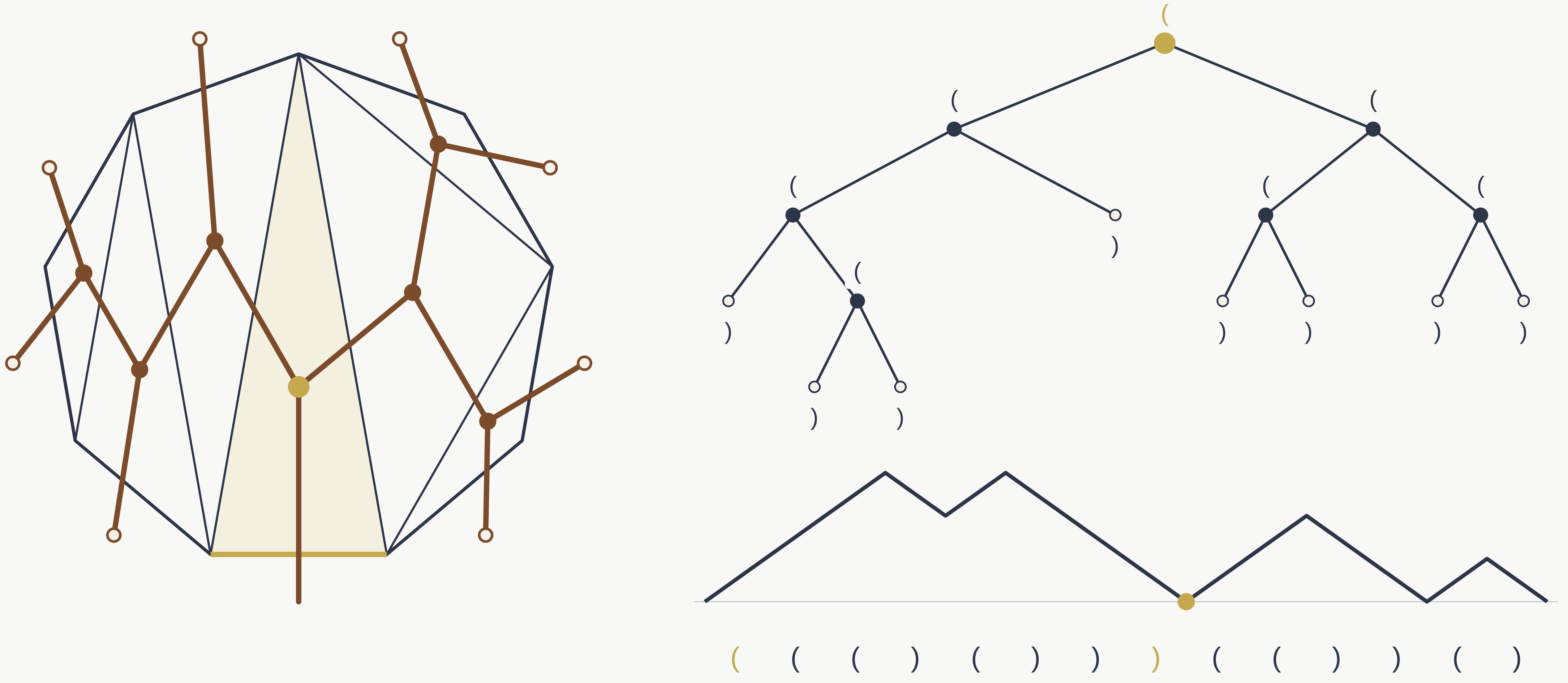


Сколько существует триангуляций выпуклого (**n+2**)-угольника?

Это **числа Каталана** $c_0 = 1,\ c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0$

Они возникает в очень разных задачах. Это количество:

- полных бинарных деревьев с n внутренними вершинами
- путей Дика из **(0,0)** в **(2n,0)**
- правильных скобочных последовательностей длины **2n**...



Формула для чисел Каталана

$$c_n = C(2n,n) - C(2n,n+1)$$

Как доказать ее комбинаторно?

Формула для чисел Каталана

$$c_n = C(2n,n) - C(2n,n+1)$$

Как доказать ее комбинаторно?

Посчитаем пути из **(0,0)** в **(0,2n)** и вычтем те, которые пересекают ось

Рекуррентное соотношение

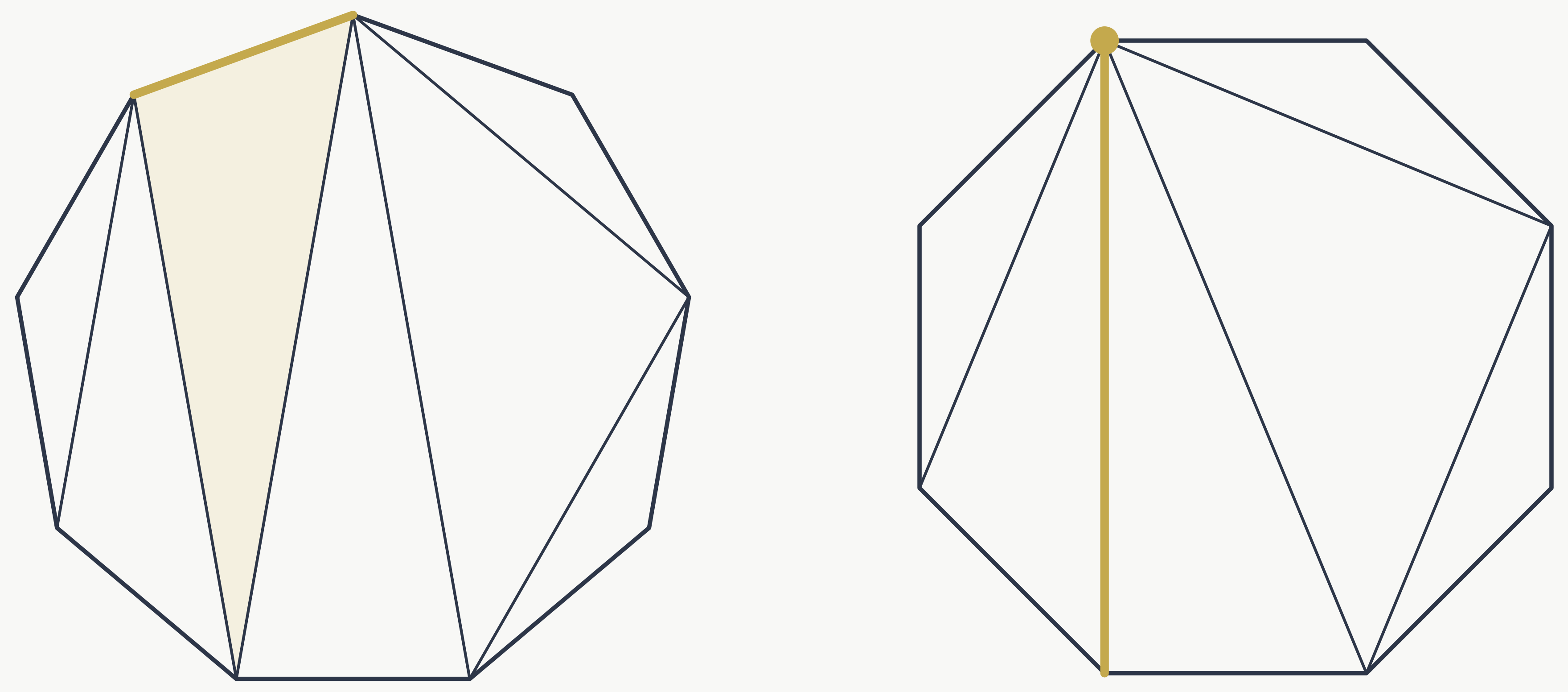
$$n \cdot c_{n-1} = (4n-2) \cdot c_{n-2}$$

Рекуррентное соотношение

$$n \cdot c_{n-1} = (4n-2) \cdot c_{n-2}$$

Слева способы разрезать **n+1**–угольник и выбрать сторону, но не основание.

Справа — разрезать **n**–угольник и выбрать конец диагонали или стороны



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!